

LE TRIANGLE RECTANGLE.

1. Propriétés du triangle rectangle

Angles du triangle rectangle

En application de la règle de la somme des angles d'un triangle, et parce qu'un triangle rectangle a un angle droit, on peut énoncer la propriété suivante :

Propriété:

Si ABC est rectangle en A, alors les angles B et C sont complémentaires.

Construction d'un triangle rectangle :

- Si on connaît les deux côtés de l'angle droit :

Triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 5$ et $AC = 3$.

On trace deux segments perpendiculaires avec les dimensions demandées. Le troisième côté (l'hypoténuse) s'obtient sans que l'on ait à connaître sa longueur.

- Si on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.

Triangle MNP rectangle en N tel que $MN = 4$ et $MP = 8$.

On trace $[MN]$ de 4 cm.

On trace $[Nx]$ la perpendiculaire à $[MN]$

On trace un arc de cercle de centre M et de rayon 8 cm, qui coupe $[Nx]$ en P.

La longueur du troisième côté est ici aussi imposée par la construction.

Conclusion : Dans un triangle rectangle, la connaissance de deux des côtés impose la longueur du troisième côté. C'est cette relation entre les trois côtés qui sera étudiée dans la propriété dite de Pythagore.

Cercle circonscrit

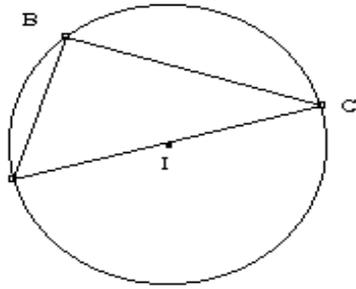
Pour tout triangle, il existe un cercle unique passant par les trois sommets; on l'appelle le cercle **circonscrit** au triangle. On dit que le triangle est **inscrit** dans le cercle.

Le centre de ce cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle.

Propriété:

Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Illustration:



Hypothèses:

- ABC est rectangle en B
- I est le milieu de [AC]

Conclusion:

I est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Propriété de la médiane

C'est une conséquence immédiate de la propriété précédente

Propriété:

Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Illustration:

<i>Hypothèses:</i>	<i>Conclusion</i>
<ul style="list-style-type: none"> • ABC est rectangle en B • I est le milieu de [AC] 	$AI = BI = CI = 1/2 AC$

2. Énoncé de Pythagore

On a vu que les longueurs des côtés du triangle n'étaient pas indépendantes, et que si l'on en connaissait deux, la troisième était imposée. La relation entre ces trois longueurs porte le nom de propriété de Pythagore (on a donné à cette propriété le nom d'un grand mathématicien grec qui n'est pas pour grand chose dans la découverte de cette propriété).

Propriété:

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Illustration:

<i>Hypothèses:</i>	<i>Conclusion</i>
KLM est rectangle en M	$KL^2 = LM^2 + KM^2$

Deux exemples d'utilisation de la propriété :

- **Si on connaît les deux côtés de l'angle droit :**

Triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 5$ et $AC = 3$.

La relation de Pythagore permet d'écrire :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34. \text{ Et donc } BC = \sqrt{34} \approx 5,83$$

- **Si on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.**

Triangle MNP rectangle en N tel que $MN = 4$ et $MP = 8$.

La relation de Pythagore permet d'écrire :

$$MP^2 = MN^2 + NP^2, \text{ donc } NP^2 = MP^2 - MN^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48, \text{ d'où } NP = \sqrt{48} \approx 6,9$$

3. Comment montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Si l'une des propriétés du triangle rectangle est mise en défaut, alors le triangle ne peut pas être rectangle.

Si le triangle n'a pas d'angle droit,

Si le triangle n'a pas deux angles complémentaires,

Si le centre du cercle circonscrit n'est pas le milieu d'un côté,

Si aucune médiane n'est égale à la moitié de la longueur du côté auquel elle est liée,

Si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres,

Alors, dans chacun de ces cas, le triangle n'est pas rectangle.

4. Comment montrer qu'un triangle est rectangle

On a fait un bilan des diverses propriétés que l'on connaît du triangle rectangle.

La question est maintenant de savoir si ces propriétés sont suffisantes pour définir un triangle rectangle; c'est à dire si elles suffisent pour obliger le triangle à être rectangle.

Ces propriétés portent sur les angles, le cercle circonscrit, la médiane relative à l'hypoténuse, les longueurs des côtés.

Il s'agit donc d'étudier les **réciproques** de chacune des propriétés précédentes.

Réciproque de la propriété des angles aigus :

Si un triangle a deux angles complémentaires, alors le triangle est rectangle.

Réciproque de la propriété du cercle circonscrit :

Si un triangle est inscrit dans un cercle avec un de ses côtés diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle.

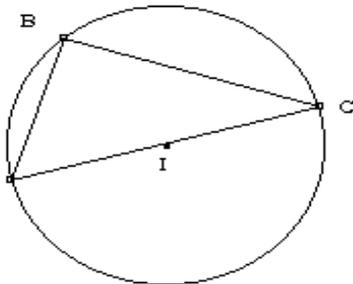


Illustration:

Hypothèses:

- A, B et C sont sur le cercle \mathcal{C}
- [AC] est un diamètre de \mathcal{C}

Conclusion:

ABC est rectangle en B.

Réciproque de la propriété de la médiane :

Dans un triangle, si la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle; et ce côté est son hypoténuse.

Illustration:

<i>Hypothèses:</i>	<i>Conclusion</i>
<ul style="list-style-type: none"> • I est le milieu de [AD] • $MI = 1/2 AD$ 	AMD est rectangle en M

Réciproque de la propriété de Pythagore :

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Illustration:

<u>Hypothèses:</u>	<u>Conclusion</u>
$KL^2 = LM^2 + KM^2$	KLM est rectangle en M

Bilan :

On peut prouver qu'un triangle est ou n'est pas rectangle lorsque :

On connaît deux des angles.

On connaît la position du centre du cercle circonscrit.

On sait que trois longueurs sont égales (la médiane et deux moitiés de côtés).

On connaît les longueurs des trois côtés.