Activités numériques : 12 points

Exercice 1 :

$\mathbf{A} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$

$\mathbf{A} = \frac{1}{3} - \frac{4}{21}$

$\mathbf{A} = \frac{7}{21} - \frac{4}{21}$

$\mathbf{A} = \frac{3}{21}$

$\boxed{\mathbf{A} = \frac{1}{7}}$

$\mathbf{B} = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right)$

$\mathbf{B} = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{3}{15}\right)$

$\mathbf{B} = \frac{6}{5} \div \frac{-2}{15}$

$\mathbf{B} = \frac{6}{5} \times \frac{-15}{2}$

$\mathbf{B} = -\frac{3 \times 2 \times 3 \times 5}{5 \times 2}$

$\boxed{\mathbf{B} = -9}$

Exercice 2 :

1. C $= (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x + 3)$
$= 9x^2 - 6x + 1 - [6x^2 + 9x - 2x - 3]$
$= 9x^2 - 6x + 1 - 6x^2 - 9x + 2x + 3$
$= 3x^2 - 13x + 4$

2. C $= (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x + 3)$
$= (3x - 1)[(3x - 1) - (2x + 3)]$
$= (3x - 1)(3x - 1 - 2x - 3)$
$= (3x - 1)(x - 4)$

3. $(3x - 1)(x - 4) = 0$

Un produit de facteurs est nul si (et seulement si) l'un au moins de ses facteurs est nul.

Donc $3x - 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ou $x = 4$

Conclusion : les solutions de cette équation sont $\frac{1}{3}$ et 4.

Exercice 3 :

Soit **c** le prix d'un canard et **p** le prix d'un poulet.

- Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 70,30 € donc **3c + 4p = 70,3**
- Un canard et un poulet valent ensemble 20,70 € donc **c + p = 20,7**

on doit donc résoudre le système $\begin{cases} c + p = 20{,}7 \\ 3c + 4p = 70{,}3 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 20{,}7 - p \\ 3c + 4p = 70{,}3 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 20{,}7 - p \\ 3(20{,}7 - p) + 4p = 70{,}3 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 20{,}7 - p \\ 62{,}1 - 3p + 4p = 70{,}3 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 20{,}7 - p \\ p = 70{,}3 - 62{,}1 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 20{,}7 - p \\ p = 8{,}2 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 20{,}7 - 8{,}2 \\ p = 8{,}2 \end{cases}$

$\begin{cases} c = 12{,}5 \\ p = 8{,}2 \end{cases}$

Conclusion : un canard coûte 12,50 € et un poulet 8,20 €.

<u>Exercice 4</u> :

Julie veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.
Si n est le nombre de bouquets, comme elle veut utiliser toutes les fleurs et que les bouquets soient de compositions identiques, n doit diviser 182 et 78. Comme de plus elle veut en faire le plus grand nombre possible, n est le PGCD de 182 et 78.

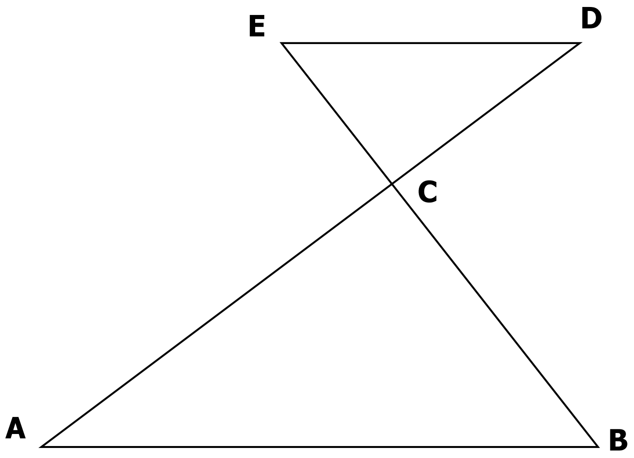
Algorithme d'Euclide :182 = 2 x 78 + 26 *(division euclidienne de 182 par 78)*
78 = 26 x 3 + 0

Le dernier reste non nul est 26, c'est donc le PGCD de 128 et 78.
On en conclut que Julie peut faire **26 bouquets**.
182 ÷ 26 = 7 donc chaque bouquet contient **7 brins de muguet.**
78 ÷ 26 = 3 donc chaque bouquet contient **3 roses.**

Activités géométriques : 12 points

Exercice 1 :

La figure suivante est donnée à titre indicatif pour préciser la position des points A, B, C, D et E.
Les longueurs représentées ne sont pas exactes.



On donne :
CE = 5
CD = 12
CA = 18
CB = 7,5
AB = 19,5

a. $\frac{CA}{CD} = \frac{18}{12} = 1,5$ $\frac{CB}{CE} = \frac{7,5}{5} = 1,5$

Donc $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$.

Comme de plus A, C, D et B, C et E sont alignés dans le même ordre, on est dans les conditions d'application de la réciproque du théorème Thalès qui nous permet de conclure que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.

b. (BE) et (AD) se coupent en C et d'après le a. (ED) et (AB) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$

Ce qui donne en remplaçant par les valeurs connues $\frac{18}{12} = \frac{7,5}{5} = \frac{19,5}{DE}$

L'égalité des produits en croix entre la première et la troisième écriture fractionnaire donne :

$18 \times DE = 12 \times 19,5$

$DE = \frac{12 \times 19,5}{18}$

$DE = 13$

c. ED est le plus long côté du triangle CED. $ED^2 = 13^2 = 169$

$EC^2 + CD^2 = 5^2 + 12^2$
$= 25 + 144$
$= 169$

Donc $ED^2 = EC^2 + CD^2$

Alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore **le triangle DEC est donc rectangle en C**.

d. Le triangle DEC étant rectangle en C on peut écrire $\tan \widehat{DEC} = \frac{CD}{EC}$

$\tan \widehat{DEC} = \frac{12}{5}$

$\tan \widehat{DEC} = 2,4$

On obtient à l'aide de la calculatrice $\widehat{\mathbf{DEC}} \approx$ **67°**.

Exercice 2 :

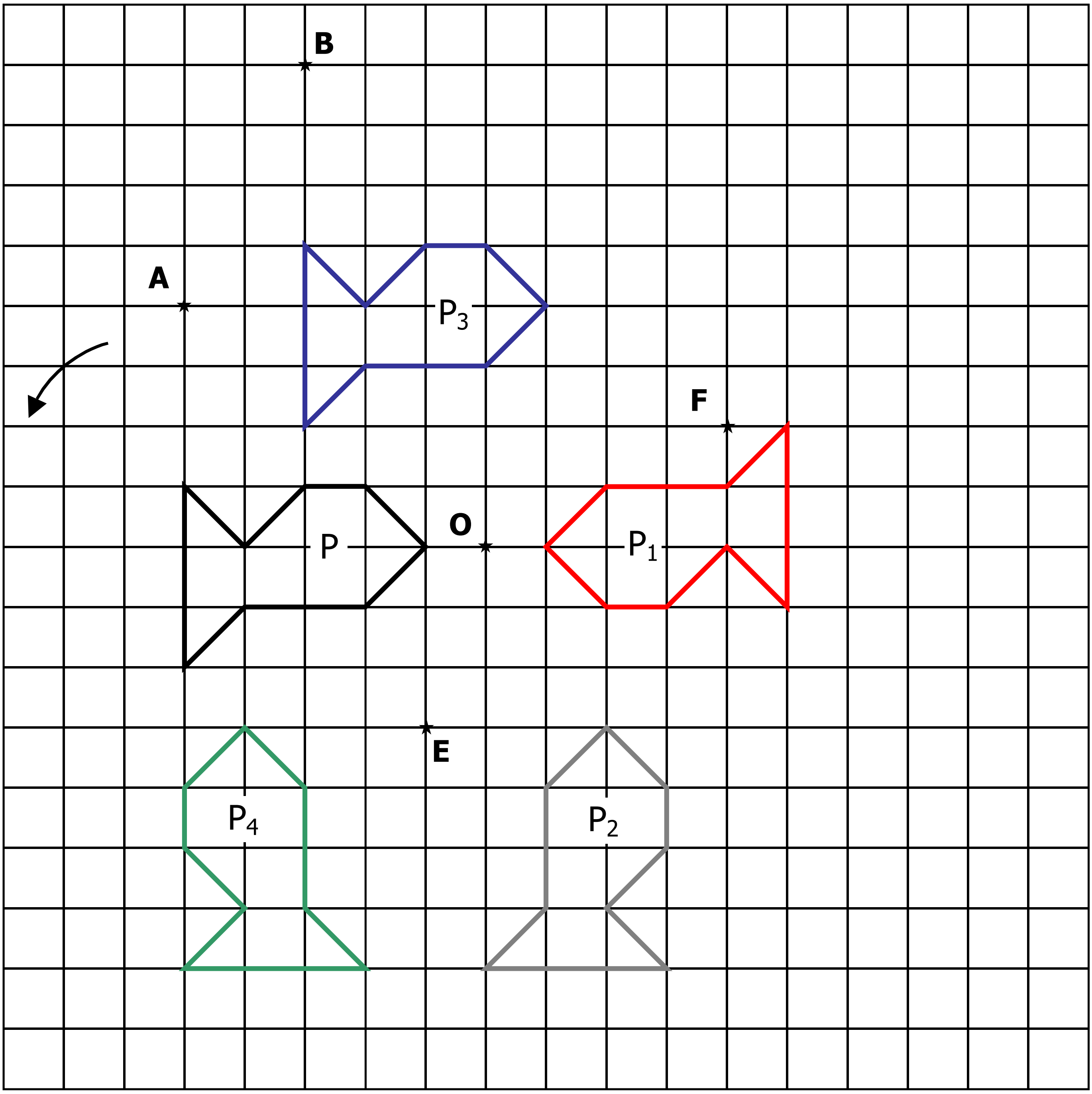
Le triangle ABC étant inscrit dans le cercle de centre O, on peut dire que $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{ACB}$, donc sa mesure est le double de celle de $\widehat{ACB}$, d'où $\widehat{ACB} = 50 \div 2 = 25°$.

De même $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{BAC}$ donc $\widehat{BAC} = 150 \div 2 = 75°$

La somme des angles d'un triangle est 180° donc $\widehat{ABC} = 180 - (25 + 75) = 80°$

Autre possibilité : dire que $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA}$ correspond à un tour complet (360°) donc $\widehat{COA} = 360 - (50 + 150) = 160$ et en disant que $\widehat{COA}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{ABC}$, on conclut sur sa mesure.

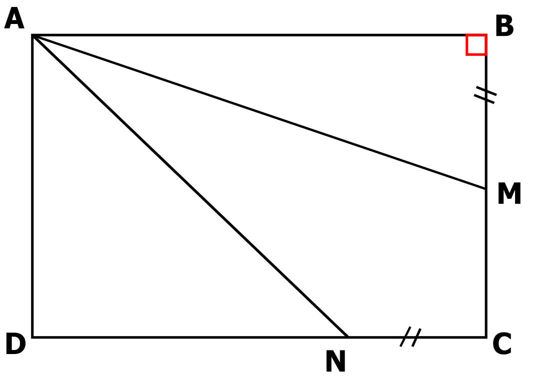
Exercice 3 :



Problème : 12 points

ABCD est un rectangle tel que AB = 6 cm et AD = 4 cm.

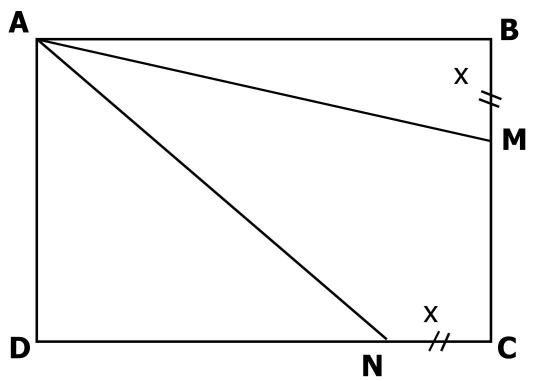
Première partie.



1. ABCD est un rectangle donc ABM est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore on peut écrire :
$AM^2 = AB^2 + BM^2$
$AM^2 = 6^2 + 2^2$
$AM^2 = 36 + 4$
$AM^2 = 40$
$AM = \sqrt{40}$
$AM = \sqrt{4 \times 10}$
$\boxed{AM = 2\sqrt{10}}$

2. $\text{Aire}_{AMCD} = \text{Aire}_{ABCD} - \text{Aire}_{ABM} - \text{Aire}_{ADN}$
$= AB \times BC - \dfrac{AB \times BM}{2} - \dfrac{AD \times DN}{2}$
$= 6 \times 4 - \dfrac{6 \times 2}{2} - \dfrac{4 \times (6-2)}{2}$
$= 24 - 6 - 8$
$= 10 \text{ cm}^2$

Deuxième partie.



1. $\text{Aire}_{ABM} = \dfrac{AB \times BM}{2} = \dfrac{6 \times x}{2} = 3x$

2. a. N est sur le segment [DC] donc DC = DN + NC
(cas de l'égalité dans l'inégalité triangulaire)
$6 = DN + x$ d'où $\boxed{DN = 6 - x}$

b. $\text{Aire}_{ADN} = \dfrac{AD \times DN}{2}$
$\text{Aire}_{ADN} = \dfrac{4 \times (6-x)}{2}$
$\text{Aire}_{ADN} = 2 \times (6 - x)$
$\text{Aire}_{ADN} = 12 - 2x$

3. a. Tableaux de valeurs des deux fonctions :

x	0	4
f(x)	0	12

x	0	4
g(x)	12	4

La représentation graphique se trouve à la fin du corrigé.

b. Les coordonnées x et y du point R vérifient le système $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 3x \\ y = -2x + 12 \end{cases}$
Il suffit de trouver x tel que $3x = -2x + 12$
$3x + 2x = 12$

$$5x = 12$$
$$x = 2{,}4$$

$$y = 3 \times 2{,}4$$
$$y = 7{,}2$$

Conclusion : Le point R est tel que R(2,4 ; 7,2)

4. a. les aires de ABM et ADN correspondent à f(x) et g(x) dire qu'elles sont égales revient à résoudre f(x) = g(x) dont la solution est 2,4 d'après le 3.b) donc les aires sont égales pour x = 2,4.

b. Dans ce cas Aire $_{AMCN}$ = Aire $_{ABCD}$ – Aire $_{ABM}$ – Aire $_{ADN}$
= 24 – 7,2 – 7,2
= 9,6 cm²

Problème , deuxième partie, question 3.a.