Clermont 99

PARTIE NUMERIQUE

Les cinq exercices sont indépendants et les détails des calculs doivent être écrits sur la copie.

Exercice 1 :

On donne A = $3\sqrt{2}-4$ et B = $3\sqrt{2}+4$

Calculer les valeurs exactes de A + B, A - B, A^2 et A × B.

Correction :

$A+B = 3\sqrt{2} - 4 + 3\sqrt{2} + 4$

$A+B = (3+3)\sqrt{2} - 4 + 4$

$A+B = 6\sqrt{2}$

$A-B = 3\sqrt{2} - 4 - (3\sqrt{2} + 4)$

$A-B = 3\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} - 4$

$A-B = (3-3)\sqrt{2} - 4 - 4$

$A-B = -8$

$A^2 = (3\sqrt{2} - 4)^2$

$A^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2\times4\times3\sqrt{2} + 4^2$

$A^2 = 3^2\sqrt{2}^2 - 24\sqrt{2} + 16$

$A^2 = 9\times2 - 24\sqrt{2} + 16$

$A^2 = 18 + 16 - 24\sqrt{2}$

$A^2 = 34 - 24\sqrt{2}$

$A\times B = (3\sqrt{2} - 4)\times(3\sqrt{2} + 4)$

$A\times B = (3\sqrt{2})^2 - 4^2$

$A\times B = 3^2\sqrt{2}^2 - 16$

$A\times B = 9\times2 - 16$

$A\times B = 18 - 16$

$A\times B = 2$

Exercice 2 :

Calculer et donner les résultats sous la forme la plus simple possible :

$C = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\times\frac{8}{9}$ $\qquad D = \left(1-\frac{2}{3}\right) : \left(1+\frac{2}{3}\right)$

Correction :

$C = \frac{7}{4}\times\frac{9}{9} - \frac{3\times8}{4\times9}$

$C = \frac{7\times9-3\times8}{4\times9}$ $\qquad ou \qquad = \frac{3\times(7\times3-8)}{4\times3\times3}$

$C = \frac{63-24}{4\times9}$ $\qquad\qquad = \frac{21-8}{3\times4}$

$C = \frac{39}{4\times9}$

$C = \frac{13\times3}{4\times3\times3}$

$C = \frac{13}{12}$

$D = \left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\right)$

$D = \frac{1}{3}\div\frac{5}{3}$

$D = \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}$

$D = \frac{1}{5}$

Exercice 3 :

Donner l'écriture décimale et l'écriture scientifique de E :

E= $\dfrac{7\times10^{-12}\times6\times10^{5}}{21\times10^{4}}$

Correction :

$E = \dfrac{7\times3\times2\times10^{-12+5-4}}{7\times3}$

$E = 2\times10^{-11}$ *(écriture scientifique)*

E = 0,000 000 000 02 (écriture décimale)

Exercice 4 :

f et g sont deux applications affines définies par :

f(x) = 2x + 2 et g(x) = - 3x + 1

1. Sur une feuille de papier millimétré, placer un repère (O, I, J) et tracer les représentations graphiques d et Δ de f et g (on prendra OI = OJ = 1cm).
2. Résoudre l'équation 2x + 2 = - 3x + 1.

Que représente la solution de cette équation pour les droites d et Δ?

Correction :

1. Les droites sont tracées dans le repère ci-contre.

On utilise pour chaque droites deux points particuliers comme ceux d'abscisse 0 et 1 :

Pour d : (0 ; 2) et (1 ; 4)

Pour Δ : (0 ; 1) et (1 ; -2)

2. $2x+2 = -3x+1$

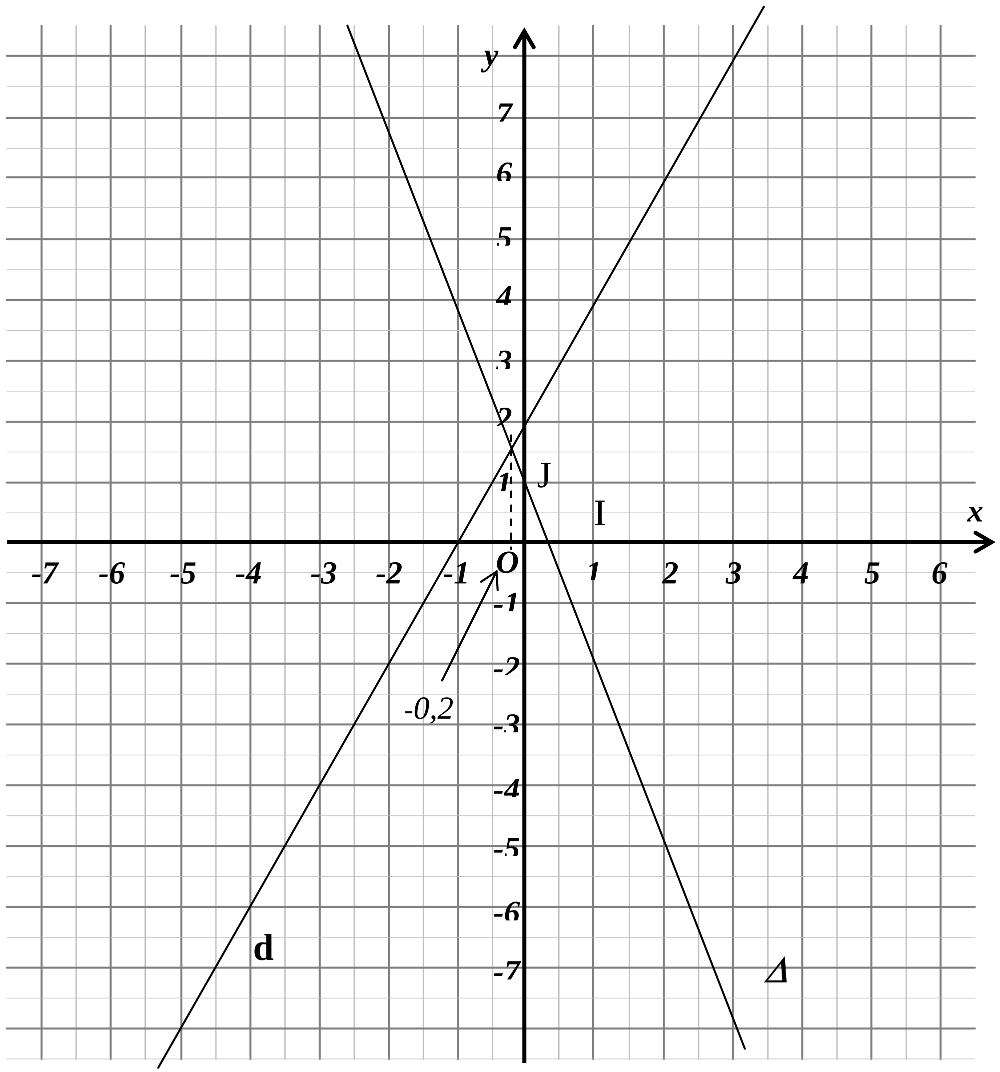
$2x+3x+2-2 = -3x+3x+1-2$

$5x = -1$

$x = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2$

$-\dfrac{1}{5}$ *est la solution de l'équation 2x+2 = -3x+1*

Ce nombre représente l'abscisse du point d'intersection des droites d et Δ.



Exercice 5 :
Dans une entreprise, les salaires ont été augmentés de 1,5 % le 1er janvier 1999.
1. En décembre 1998, le salaire de Monsieur Martin était de 8246 F. Calculer son salaire en janvier 1999.
2. On désigne par x le salaire d'un employé en décembre 1998 et par y son salaire en janvier 1999. Exprimer y en fonction de x. Donner le résultat sous la forme y = ax, a étant un nombre décimal.
3. En janvier 1999, le salaire de Monsieur Durand est de 7348,60 F
Quel était son salaire en décembre 1998 ?

Correction :
1. On ajoute 1,5 % de 8246 à 8246 :

$$8246+\frac{1{,}5}{100}\times 8246$$
$$= 8246+\frac{12369}{100}$$
$$= 8246+123{,}69$$
$$= 8369{,}69$$

Le salaire en janvier de Monsieur Martin est de 8369,69F.

2. $$y = x+\frac{1{,}5}{100}\times x$$
$$y = \frac{100}{100}\times x+\frac{1{,}5}{100}\times x$$
$$y = \frac{100+1{,}5}{100}\times x$$
$$y = \frac{101{,}5}{100}\times x$$
$$y = 1{,}015x$$

Donc y = ax avec a = 1,015.
3.D'après la question 2., on a avec x le salaire de Maxime Durant en décembre 1998 :

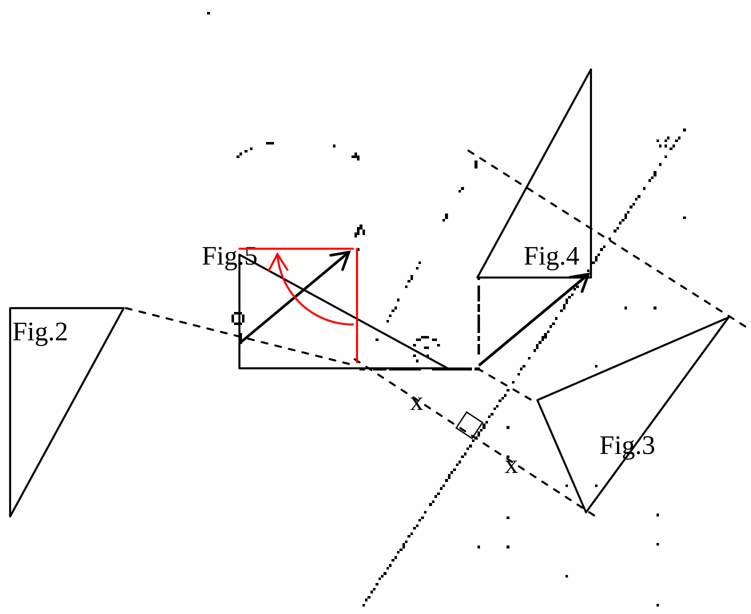
$$7348{,}60 = 1{,}015x$$
$$x = \frac{7348{,}60}{1{,}015}$$
$$x = 7240$$

Le salaire de Maxime Durant était de 7240 F En décembre 1998.

PARTIE GEOMETRIQUE

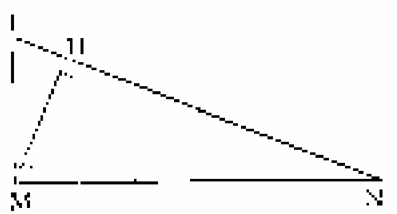
Exercice 1 :
Sur la figure ci-après, construire :
. la figure 2 image du triangle 1 par la symétrie de centre O,
. la figure 3 image du triangle 1 par la symétrie d'axe d,
. la figure 4 image du triangle1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$,
. la figure 5 image du triangle 1 par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens de la flèche.

Correction :



Exercice 2 :
Le triangle LMN est rectangle en M et [MH] est sa hauteur issue de M.

On donne : ML = 2,4 cm LN = 6,4 cm
1. Calculer la valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{MLN}$.
On donnera le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.
2. Sans calculer la valeur de l'angle $\widehat{MLN}$, calculer LH.
Le résultat sera écrit sous forme d'un nombre décimal.



Correction :
On utilise ici la formule du cosinus dans le triangle rectangle :

$$cos = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

1. *Dans le triangle MLN rectangle en M,*

$$cos\ (\widehat{MLN}) = \frac{ML}{LN}$$

$$cos\ (\widehat{MLN}) = \frac{2{,}4}{6{,}4}$$

$$cos\ (\widehat{MLN}) = \frac{3 \times 0{,}8}{8 \times 0{,}8}$$

$$cos\ (\widehat{MLN}) = \frac{3}{8}$$

2. $\widehat{MLN} = \widehat{MLH}$ *donc* $cos\ (\widehat{MLN}) = cos\ (\widehat{MLH})$.
Dans le triangle MLH rectangle en H,

$$cos\ (\widehat{MLH}) = \frac{LH}{ML}$$

donc $LH = ML \times cos\ (\widehat{MLH})$

donc $LH = ML \times cos\ (\widehat{MLN})$

$$LH = 2{,}4 \times \frac{3}{8}$$

$$LH = \frac{8 \times 0{,}3 \times 3}{8}$$

$$LH = 0{,}9$$

Exercice 3 :
1. On admet qu'un ballon de basket est assimilable à une sphère de rayon R_1 = 12,1 cm.
Calculer le volume V_1, en cm^3, de ce ballon; donner le résultat arrondi au cm^3.
2. On admet qu'une balle de tennis est assimilable à une sphère de rayon R_2, en cm.
La balle de tennis est ainsi une réduction du ballon de basket. Le coefficient de réduction est $\frac{4}{15}$.
a) Calculer R_2 ; donner le résultat arrondi au mm.
b) Sans utiliser cette valeur de R_2, calculer le volume V_2, en cm^3, d'une balle de tennis ; donner le résultat arrondi à l'unité.

Rappel : Volume d'une sphère de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Correction :
1. *En appliquant la formule :*

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\ 3}$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi 12{,}1^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi 1771{,}561$$

$V_1 \approx 7421\ cm^3$.

2.a. $R_2 = \dfrac{4}{15}R_1$

$R_2 = \dfrac{4}{15}\times 12{,}1$

$R_2 \approx 3{,}2$ cm.

b. On utilise la première formulation de R_2 en fonction de R_1 :

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{4}{15}R_1\right)^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \times \frac{4^3}{15^3}$$

$$V_2 = V_1 \times \frac{4^3}{15^3}$$

$$V_2 = \frac{64}{3375}V_1$$

$V_2 \approx 141$ cm^3.

PROBLEME (12 points)

Tracer un segment [BC] de longueur 6 cm et construire sa médiatrice Δ.

Δ coupe [BC] en H. Soit A un point de Δ tel que HA = 4 cm.

1. Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier la réponse.
2. Montrer que AB = 5 cm.
3. Soit E le point de [BC] tel que BE = 2 cm. La droite d passant par E et parallèle à Δ coupe [AB] en F.

Montrer que $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{2}{3}$

En déduire la valeur exacte de BF.

4. Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle ABH.

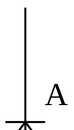
Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle ACH.

a) Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

b) Calculer IJ.

5. Quelle est la nature du quadrilatère AIHJ? Justifier la réponse.

Correction :



1. A est sur la médiatrice de [BC] donc le point A est équidistant de B et de C c'est-à-dire AB = AC.

Le triangle ABC est donc isocèle de sommet principal A.

2. La droite (AH) est la médiatrice du segment [BC] par suite la droite (AH) est perpendiculaire au segment [BC].

Le triangle ABH est alors rectangle en H, en appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle rectangle :

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$AB^2 = 4^2 + 3^2$ *(H est le milieu de [BC] : HB = 6÷2)*

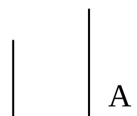
$AB^2 = 16 + 9$

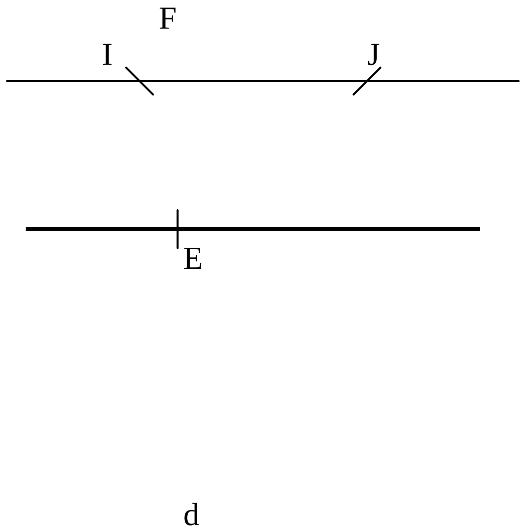
$AB^2 = 25$

$AB = \sqrt{25}$

d'où $AB = 5$ cm.

3.





Les points B, F et A sont alignés ainsi que les points B, E et H.
De plus les droites (FE) et (HA) sont parallèles (ce sont les droites d et Δ). D'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BH}$$

$$\frac{BF}{5} = \frac{2}{3}$$

$$BF = \frac{2}{3} \times 5$$

$$BF = \frac{10}{3}$$

4.a) Puisque le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABH et que ce triangle est rectangle, I est le milieu de l'hypoténuse [AB].
De même, J est le milieu de l'hypoténuse [AC].
D'après le théorème des milieux, la droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.
Donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

b) I milieu de [AB] et J milieu de [AC].

D'après le théorème des milieux, $IJ = \frac{1}{2} AB$.

Donc IJ = 3 cm.

5. En utilisant le théorème des milieux dans le triangle ABC, puisque I est le milieu de [AB] et H est le milieu de [BC], les droites (IH) et (AC) sont parallèles.
De même les droites (JH) et (AB) sont parallèles.
AIHJ est un quadrilatère ayant ses côtés parallèles deux à deux, il s'agit d'un parallélogramme.
D'après 4.a), les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Puisque la droite Δ est perpendiculaire à la droite (BC), elle est aussi perpendiculaire à la droite (IJ).
Or les droites Δ et (IJ) portent les diagonales de AIHJ.
Un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange.
Conclusion : AIHJ est un losange.

Remarque : AIHJ n'est pas car ses diagonales ne sont pas de la même longueur (AH≠IJ).