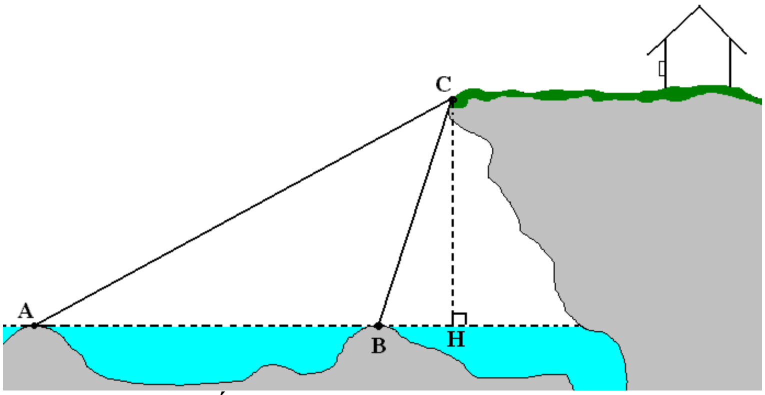
RELATION TRIGONOMETRIQUE DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

<u>Pré-requis :</u>

-Trigonométrie dans le triangle rectangle
-le radian
-la proportionnalité

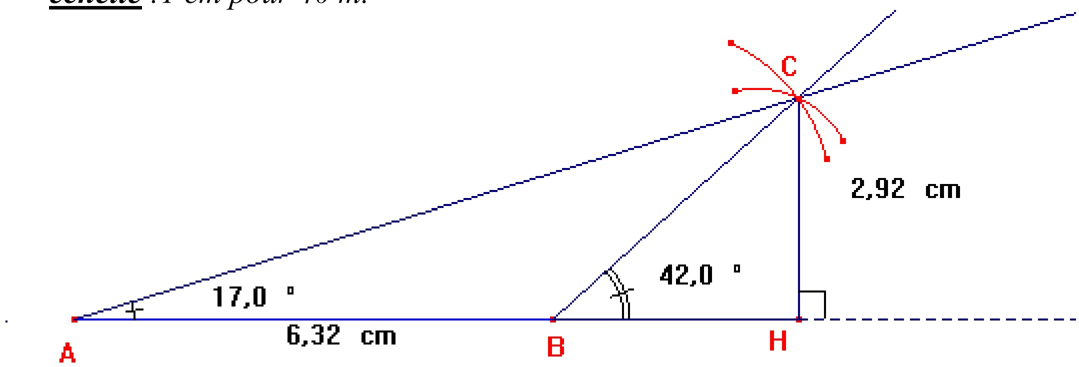
<u>I-mise en situations</u>



Pour connaître la hauteur de la falaise d'Étretat (Seine maritime), on mesure deux angles d'élévation par rapport à un point C sur la falaise : $\widehat{CAH} = 17°$ et $\widehat{CBH} = 42°$; La distance AB est égale à 253 m.

1- **Construire** sur le quadrillage ci-dessous, les triangles de la figure.

<u>échelle</u> *:1 cm pour 40 m.*



2- **Mesurer** CH. **<u>$CH = 2{,}92 \times 40 = 116{,}8$ m</u>**

3- Nous allons déterminer CH par le calcul.

a) **Donner** l'expression de CH dans le triangle ACH rectangle en H <u>en fonction de</u> BH et de l'angle $\widehat{CAH}$.

D'après la formule de la tangente : $\boxed{\tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH}}$

or $\boxed{AH = AB + BH}$ **soit <u>$AH = 252 + BH$</u>**

Soit $\boxed{CH = (253 + BH) \times \tan \widehat{CAH}}$

b) **Donner** l'expression de BH <u>en fonction de</u> CH et de l'angle $\widehat{CBH}$ dans le triangle CBH rectangle en H.

D'après la formule la tangente : $\boxed{\tan \widehat{CBH} = \frac{CH}{BH}}$ **soit** $\boxed{BH = \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}}}$

c) En utilisant les formules établies au 2.a) et 2.b), donner l'expression de CH en fonction de l'angle $\widehat{CAH}$ et $\widehat{CBH}$.

$$CH = (253 + BH) \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH = \left(253 + \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}}\right) \times \tan \widehat{CAH}$$

$$= 253 \times \tan \widehat{CAH} + \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}} \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH - \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}} \times \tan \widehat{CAH} = 253 \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH \left(1 - \frac{\tan \widehat{CAH}}{\tan \widehat{CBH}}\right) = 253 \times \tan \widehat{CAH}$$

$$\boxed{CH = 253 \times \frac{\tan \widehat{CAH}}{\left(1 - \frac{\tan \widehat{CAH}}{\tan \widehat{CBH}}\right)}}$$

d) **En déduire** CH.

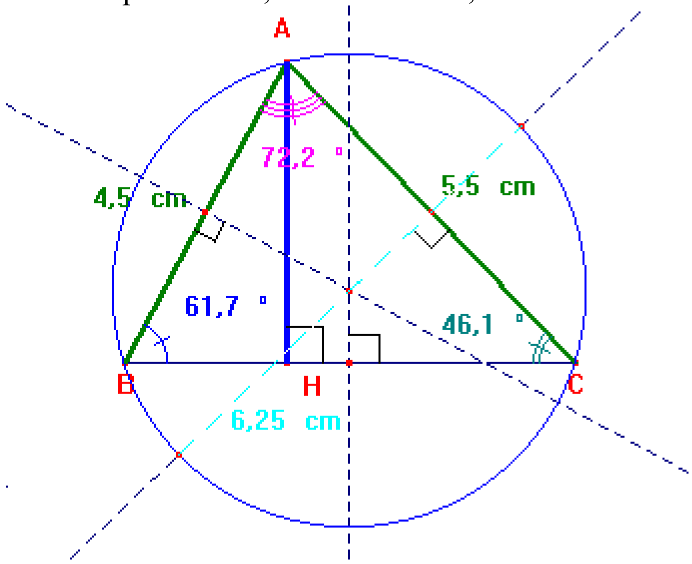
$$\boxed{CH \approx 117{,}12 \text{ m}}$$

Constatation : *le calcul est « faisable » mais long et compliqué !!!!!*

II- Théorème des sinus.

1-Découverte du théorème.

1-**Construire** un triangle ABC tel que AB = 4,5 cm et AC = 5,5 cm.



2-**Tracer** la hauteur [AH].

3-

a) **Utiliser** les relations trigonométriques, dans le triangle ABH, rectangle en H, **pour exprimer** $\sin \widehat{B}$:

$$\sin \widehat{B} = \frac{AH}{AB}$$

b) **En déduire** une expression de AH <u>en fonction</u> de $\sin \widehat{B}$ et AB. $\boxed{AH = AB \times \sin \widehat{B}}$

c) **Utiliser** les relations trigonométriques, dans le triangle ACH, rectangle en H, **pour exprimer** $\sin \widehat{C}$

$$\sin \widehat{C} = \frac{AH}{AC}$$

d) **En déduire** une expression de AH <u>en fonction de</u> $\sin \widehat{C}$ et AC. $\boxed{AH = AC \times \sin \widehat{C}}$

4-En déduire la relation suivante : $\dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{C}}$

D'après la question 3.b) et 3.d) : $AB \times \sin \widehat{B} = AC \times \sin \widehat{C}$ **soit** $\boxed{\dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{C}}}$

5-Mesurer sur la figure, les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ et compléter le tableau suivant :

$\widehat{A} = 72{,}2°$ $\widehat{B} = 61{,}7°$ $\widehat{C} = 46{,}1°$

	$\dfrac{BA}{\sin \widehat{C}}$	$\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}}$	$\dfrac{AC}{\sin \widehat{B}}$
Valeur exacte	$\dfrac{4{,}5}{\sin 46{,}1°}$	$\dfrac{6}{\sin 72{,}2°}$	$\dfrac{5{,}5}{\sin 61{,}7°}$
Valeur arrondie à 10^{-1} près	**6,24**	**6,3**	**6,24**

6- **Conclure.**

Les résultats sont quasiment identiques, on peut donc conclure que les longueurs de côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

7- **Tracer** le cercle circonscrit au triangle.

8-**Mesurer** son diamètre. **En déduire** son rayon. **On mesure $\varnothing = 6{,}25$ cm soit $R = \dfrac{\varnothing}{2} \approx 3{,}12$**

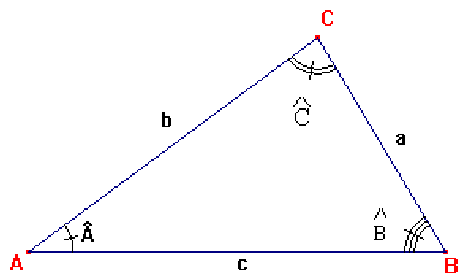
9-**En déduire** une égalité entre la relation suivante $\boxed{\dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin \widehat{A}}}$ et le rayon.

$$\boxed{\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R}$$

2-Définition.

Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}}$$



3- Dans quelle situation utiliser le théorème des sinus.

- Calculer la longueur d'un côté lorsque l'on connaît la mesure de deux angles et la longueur d'un côté.
- Calculer la mesure d'un angle lorsque l'on connaît la longueur de deux côtés et la mesure d'un angle non compris entre ces deux côtés.

4- Applications.

1- Calculer les longueurs du côté [AB] d'un triangle ABC tel que :

		Résolution
a)	**BC = 10 ; $\widehat{A} = 70°$; $\widehat{C} = 50°$**	
FIGURE		
b)	**BC =8 ; $\widehat{B} = 50°$; $\widehat{C} = 100°$**	
FIGURE		

2- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A}$ d'un triangle ABC tel que :

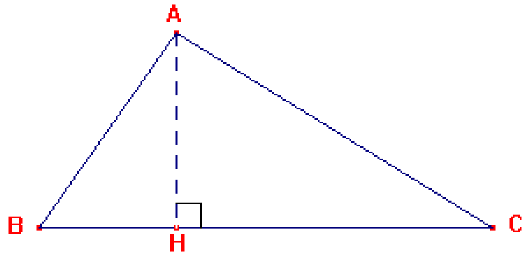
a)	**AB = 8 ; BC = 10 ; $\widehat{C} = 40°$**	
FIGURE		
b)	**AB = 15 ; BC = 20 ; $\widehat{C} = 40°$**	
FIGURE		

II- Théorème des cosinus ou théorème de Carnot.

1-Découverte du théorème.

a-premier cas : *Triangle quelconque dont tous les angles sont aigus.*

Soit le triangle quelconque ABC.



1-Travail dans le triangle rectangle ABH.

a) **Ecrire** la relation de Pythagore pour le triangle rectangle ABH.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

b) **Exprimer** BH en fonction de BC et HC.

$BC = BH + HC$ soit $\underline{BH = BC - HC}$

c) **Donner** alors l'expression de AB^2.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\underline{AB^2 = AH^2 + BC^2 - 2.BC.HC + HC^2} \quad \textbf{(1)}$$

2-Travail dans le triangle rectangle ACH.

a) **Ecrire** la relation de Pythagore pour le triangle rectangle ACH.

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

b) **Exprimer** AH en fonction de AC et CH.

$$AH^2 = AC^2 - CH^2$$

c) **Remplacer** l'expression de AH^2 dans la relation (1).

$$AB^2 = AC^2 - CH^2 + BC^2 - 2.BC.HC + HC^2$$

$$\underline{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.BC.HC}$$

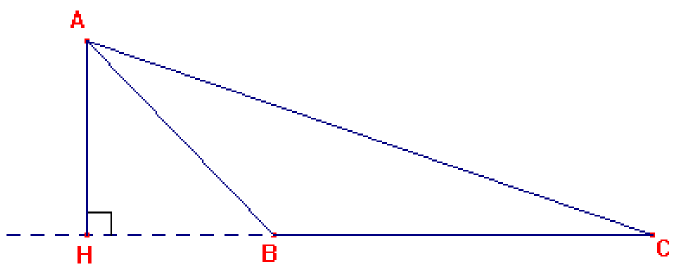
d) **Exprimer** CH en fonction de AC et de l'angle $\widehat{C}$.

$\cos \widehat{C} = \dfrac{HC}{AC}$ soit $\underline{HC = AC \times \cos \widehat{C}}$

3- En **déduire** l'expression de AB^2 en fonction de AC, BC et $\widehat{C}$.

$$\boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.BC.AC.\cos \widehat{C}}$$

b-deuxième cas : *Triangle quelconque dont l'un des angles est obtus.*



1- **Exprimer** BH en fonction de HC et BC.

$HC = HB + BC$ soit $\underline{BH = HC - BC}$

2- **Exprimer** AB^2 dans le triangle rectangle AHB.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

3- **Exprimer** AB^2 en fonction de AC, BC et HC.

$$AB^2 = AH^2 + (HC - BC)^2$$

$$= AH^2 + HC^2 - 2.HC.BC + BC^2$$

D'où $AB^2 = AC^2 - HC^2 + HC^2 - 2.HC.BC + BC^2$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.HC.BC$$

4- **Exprimer** CH en fonction de AC et de l'angle $\widehat{C}$.

$$\cos \widehat{C} = \frac{HC}{AC} \text{ soit } \underline{HC = AC \times \cos \widehat{C}}$$

5- En déduire l'expression de AB² en fonction de AC, BC et $\widehat{C}$.

$$\boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.BC.AC.\cos \widehat{C}}$$

4- Obtient-on le même résultat que dans le premier cas ?

Oui, les deux expressions obtenues sont identiques.

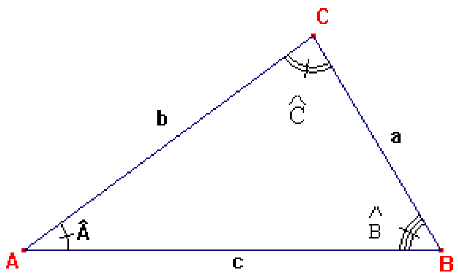
2-Définition.

Dans tout triangle :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \widehat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a.b.\cos \widehat{C}$



3-Dans quelle situation utiliser le théorème des cosinus.

- Calculer la longueur d'un côté lorsque l'on connaît la mesure d'un angle et les longueurs de deux côtés.
- Calculer la mesure d'un angle lorsque l'on connaît la longueur des trois côtés.

4-Dans quelle situation utiliser le théorème des cosinus.

1-Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$ du triangle ABC tel que :

		Résolution
a)	**AB = 8; AC= 7; BC = 6**	
FIGURE		
b)	**AB = 3; AC= 5; BC = 4**	
FIGURE		

2- Calculer la mesure de la longueur du côté [AB] du triangle ABC tel que :

a)	**AC = 15 ; BC = 19 ; $\widehat{C}$ = 115°**	
FIGURE		
b)	**AC = 10 ; BC = 20 ; $\widehat{C}$ = 60°**	
FIGURE		

III-Aire d'un triangle.

1-Définition.

L'aire d'un triangle ABC est égale à :

$$\boxed{S = \frac{1}{2}.b.c.\sin \widehat{A} = \frac{1}{2}.a.c.\sin \widehat{B} = \frac{1}{2}.a.b.\sin \widehat{C}}$$

2-Exemple.

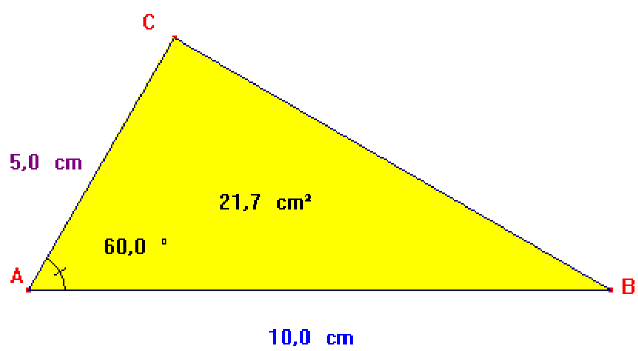
Calculer l'aire du triangle ABC tel que :

AB = 10 cm ; AC = 5 cm ; $\widehat{A}$ = 60°

$$\boxed{S = \frac{1}{2} b.c.\sin \widehat{A}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times \sin 60°$$

$$\underline{S = 21{,}65}$$



IV-Activités d'examen.

1- Calculer les angles d'un triangle ABC tel que :

BC = 8 cm ; AC = 4 cm ; AB = 6 cm

2- On considère le diagramme des forces appliquées à un solide en équilibre :

F_1 = 100 N ; F_2 = 70 N ; F_3 = 50 N

Calculer la mesure à 1° près de chaque angle de ce triangle.

3- On donne deux tensions $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ avec :

$U_1 = 14$ V et $U_2 = 18$ V ; $(\overrightarrow{U_1} ; \overrightarrow{U_2}) = -60°$

On pose $\vec{U}_T = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ et $\phi = (\overrightarrow{U_1} ; \overrightarrow{U_T})$.

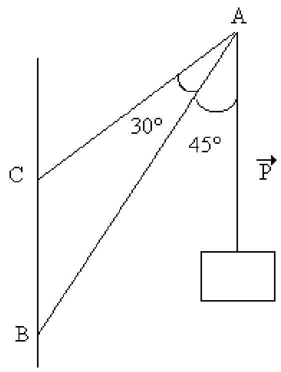
Déterminer U_T et ϕ_T

4-

Au point A sont exercées :

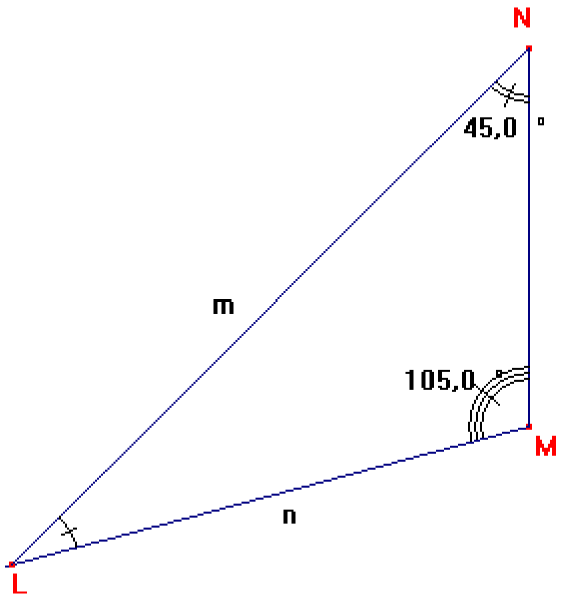
-un poids $\vec{P}$ d'intensité 1500N.

-Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. exercées par les barres [AB] et [AC] dont les droites d'action sont celles des barres.



1)Déterminer les mesures m et n des côtés LN et LM du triangle LMN ci-contre pour MN = l = 15 cm.

$\widehat{N} = 45°$; $\widehat{M} = 105°$.



2)On rappelle que la condition d'équilibre du point A s'écrit : $\boxed{\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}}$

a-Tracer le polygone, ou dynamique des forces.

b-En déduire le sens et l'intensité des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.