1 Proportionnalité

1.1 Rappels et vocabulaire

: 4 ou $\times \frac{1}{4}$

côté d'un carré en cm	3	12		
périmètre du carré en cm			28	15

$\times 4$

La longueur du côté d'un carré et son périmètre sont proportionnels car on multiplie toujours la longueur par 4 pour trouver le périmètre.

P = $4 \times c$

4et $\frac{1}{4}$ sont les coefficients de proportionnalité

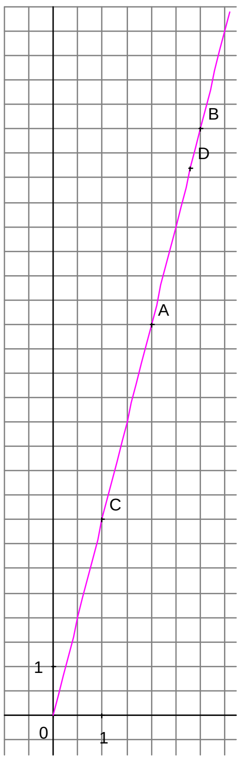
1.2 Représentation graphique

<u>Propriété</u> : si on trace dans un repère les points obtenus à partir d'un tableau de proportionnalité alors ces points sont alignés avec l'origine.

Exemple :

côté d'un carré (abscisse x)	2	3	1	2,8
périmètre du carré (ordonnée y)	8	12	4	11,2

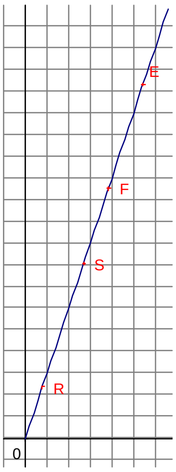
La représentation graphique est :



Propriété : si dans un repère des points sont alignés avec l'origine alors ils sont la représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

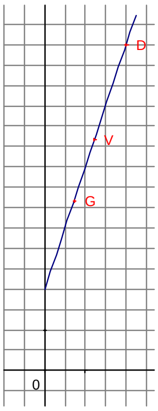
Exemple:

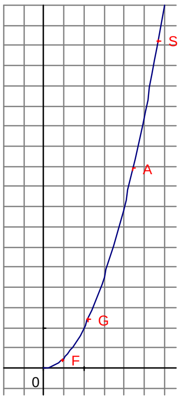
S, R, E et F sont alignés avec 0



donc ils représentent une situation de proportionnalité

Contre-exemples : (à faire à partie d'une application affine du genre «j'ai acheté une baguette à 4 F et des croissants à 3F pour le premier et aire d'un carré pour le second)





Les points sont alignés mais pas avec l'origine. Il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

Les points ne sont pas alignés donc il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

1.3 Exemples d'emploi de la proportionnalité

Pourcentage

Conversion heure minute en heure décimale

Echelle

2 Vitesse

2.1 Vitesse moyenne

Définition : la vitesse moyenne d'un mobile sur un parcours est le quotient de la distance parcourue par la durée du parcours.

distance parcourue

$$v = \frac{d}{t}$$

vitesse moyenne

durée

Exemple : une voiture a parcouru 290 km en 3h30min. Quelle fut sa vitesse moyenne ?

3h30min = 3,5h

$v = \frac{290}{3,5} \approx 83$ km/h (ou km.h^{-1})

Remarque : la voiture a pu parfois rouler à 50 km/h, parfois à 90 km/h sur certaines portions du trajet.

Propriété : $d = v \times t$
A une vitesse moyenne donnée, la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.

Exemple :
Un avion vole à une vitesse moyenne de 800 km/h pendant 7h45min. Quelle distance parcourt-il ?

7h45min = 7,75 h

$d = v \times t$
$d = 800 \times 7,75 = 6200$

ou

$v = \frac{d}{t}$
$800 = \frac{d}{7,75}$
$d = 800 \times 7,75 = 6200$ km

A la même vitesse combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 9600 km ?

$d = v \times t$
$9600 = 800 \times t$
$t = \frac{9600}{800}$

$t = 12$h

ou

$v = \frac{d}{t}$
$800 = \frac{9600}{t}$
$800t = 9600$
$t = \frac{9600}{800}$
$t = 12$h

2.2 Conversion

Exemples :
Un piéton a une vitesse moyenne de 3,4 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne en m/s (ou $m.s^{-1}$)

3,4 km = 3400 m et 1h = 3600 s

$v = \frac{3400}{3600} = 0,9$ m/s

La vitesse moyenne du jaguar en course est de 25 m/s. Convertir en km/h.

25 m = 0,025 et 1 s = $\frac{1}{3600}$ h

$v = \frac{0,025}{\frac{1}{3600}} = 0,025 \times 3600 = 90$ km/h

3 Fonctions linéaires

3.1 Pourcentage

Dans un magasin les prix ont augmenté de 5%.

ancien prix x	150	200	586	
nouveau prix y				120

On a $y = x + x \times \frac{5}{100} = x\,(1 + 0{,}05) = 1{,}05$ donc le nouveau et l'ancien prix sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité est 1,05 (1 + %)

Si les prix avaient baissé de 10%

ancien prix x	150	200	586	
nouveau prix y				120

On a $y = x - x \times \frac{10}{100} = x\,(1 - 0{,}1) = 0{,}9\,x$ donc le nouveau prix et l'ancien prix sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité est 0,9 (1 – %)

3.2 Vocabulaire, notation

Soit a un nombre fixé, la relation de proportionnalité entre x et y définie par $y = ax$ s'appelle la fonction linéaire de coefficient a.

<u>Exemple</u> :
La relation définie par $y = 3x$ est une fonction linéaire de coefficient 3.

On peut lui donner un nom, souvent une lettre minuscule par exemple f, ou/et l'écrire $x \longmapsto 3x$

$3x$ est appelé image de x.

<u>Exemple</u> :
Soit la fonction linéaire g : $x \longmapsto -7x$

L'image de 5 par la fonction g est $-7 \times 5 = -35$

On peut la noter : g(-7)

<u>Exemple</u> :
Soit f : $x \longmapsto 4x$
Calculer f(2), f(-1), f(0)

f(2) = $4 \times 2 = 8$
f(-1) = $4 \times (-1) = -4$
f(0) = $4 \times 0 = 0$

3.3 Recherche d'une fonction linéaire

Propriété : Etant donnés deux nombres r (non nul) et l, il n'existe qu'une fonction linéaire par laquelle l est l'image de r.

Exemple :
Trouver la fonction linéaire pour laquelle 5 est l'image de 8.

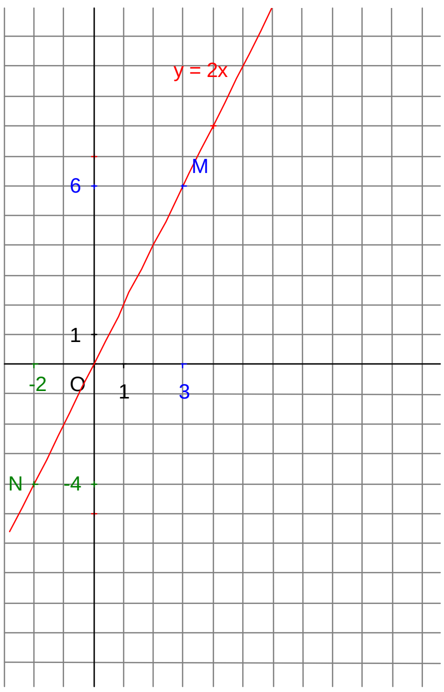
On cherche donc a tel que $5 = a \times 8$
donc $\frac{5}{8} = a$
La fonction linéaire est $x \longmapsto \frac{5}{8}x$

3.4 Représentation graphique

Propriété : La représentation graphique d'une fonction linéaire $x \longmapsto ax$ est une droite passant par l'origine.

On dit qu'elle a pour équation $y = ax$.
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur de la droite.

Exemple : soit la fonction linéaire $x \longmapsto 2x$
Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = 2x$. Elle est formée par les points de coordonnées $(x\,;2x)$



Pour la tracer il suffit de trouver un point M $(x\,;\,2x)$

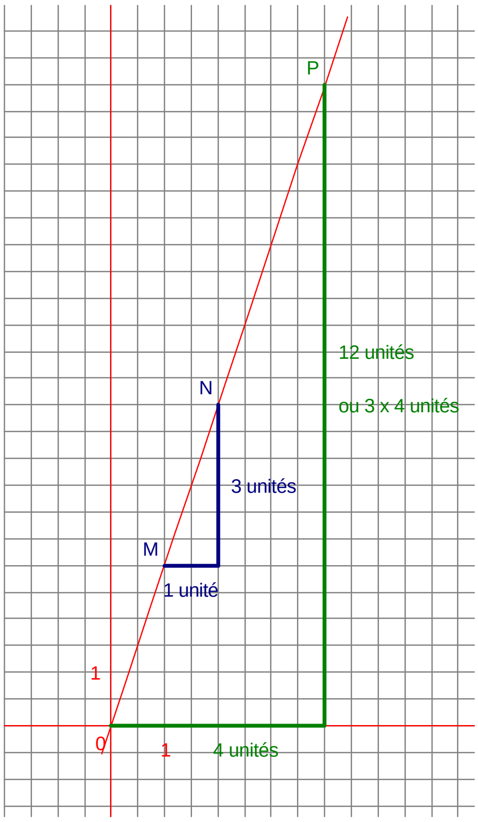
On choisit x et on peut calculer y :
par exemple si x=3 M (3 ; 6)

On relie alors M et O.

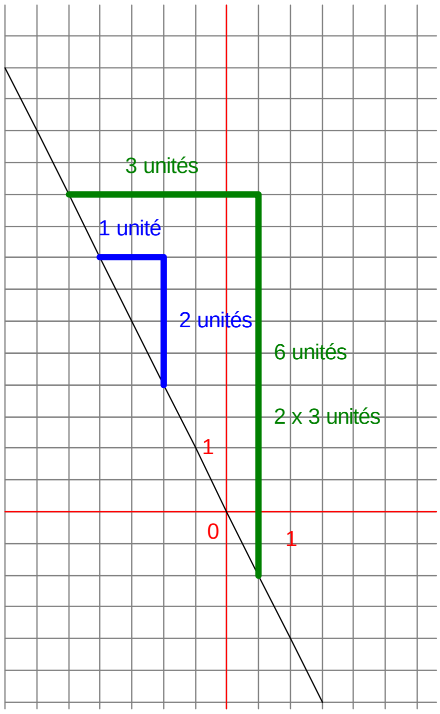
Pour plus de sûreté on peut vérifier avec un troisième point. Par exemple si x = -2 on a N(-2 ; -4).

Rôle du coefficient directeur :

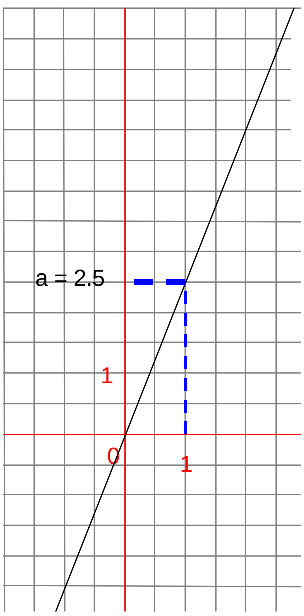
Soit la représentation de la fonction linéaire $x \longmapsto 3x$



Soit la représentation de la fonction linéaire $x \longmapsto -2x$



Propriété : Dans un repère toute droite passant par l'origine et distincte de l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction linéaire. Le coefficient est alors l'ordonnée du point d'abscisse 1.



Cette droite est la représentation graphique de la fonction linéaire $x \longmapsto 2{,}5x$

4 Fonction affine

4.1 Vocabulaire ; notation

Définition : Soit a et b deux nombres donnés. La fonction affine notée $x \longmapsto ax + b$ est la relation qui à un nombre x associe le nombre $ax + b$ (appelé image de x).

Tout comme pour les fonctions linéaires on peut donner pour nom à une fonction affine une lettre minuscule.

Exemples :

Parmi ces relations lesquelles sont des applications affines ?

$x \longmapsto 3x +5$	oui	a = 3	b = 5	
$x \longmapsto 2x - 3$	oui	a = 2	b = -3	
$x \longmapsto -5x +2$	oui	a = -5	b = 2	
$x \longmapsto 6 +2x$	oui	a = 2	b = 6	
$x \longmapsto 2x^2 +8$	non car x est au carré			
$x \longmapsto 2x$	oui	a = 2	b = 0	fonction linéaire
$x \longmapsto 4$	oui	a = 0	b = 4	
$x \longmapsto \frac{3x+5}{8}$	oui	$a = \frac{3}{8}$	$b= \frac{5}{8}$	$x \longmapsto \frac{3}{8}x + \frac{5}{8}$
$x \longmapsto 2x \times x + 5$		non c'est la même que $2x^2 +5$		x est au carré

Exemple :
Soit f la fonction affine $x \longmapsto 3{,}5x + 2$
Calculer f(5), f(-2).
$f(5) = 3{,}5 \times 5 + 2 = 17.5 + 2 = 19{,}5$
$f(-2) = 3{,}5 \times (-2) + 2 = -7 + 2 = -5$

4.2 Fonction linéaire associée

Propriété : Toute fonction linéaire est une application affine dont le terme b est égal à 0.

Définition : Soit la fonction affine $x \longmapsto ax + b$, la fonction linéaire $x \longmapsto ax$ est appelée fonction linéaire associée.

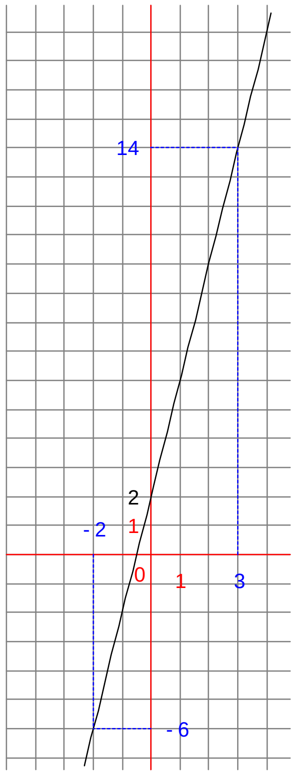
Exemple : la fonction linéaire $x \longmapsto 6x$ est la fonction linéaire associée aux fonctions affines $x \longmapsto 6x +2$,
$x \longmapsto 6x - \frac{3}{7}$, $x \longmapsto 6x + b$ quelque soit la valeur de b.

4.3 Représentation graphique

Propriété : la représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ est une droite passant par le point M(0 ;b)

On dit que $y = ax + b$ est une équation de cette droite. On appelle a le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine ;
Le coefficient directeur a le même rôle que pour les fonctions linéaires.

Exemple :
Soit la fonction affine $x \longmapsto 4x + 2$



Pour la dessiner on va chercher deux points de cette droite. On peut choisir l'abscisse et calculer l'ordonnée.

si $x = 3$ on a $y = 4 \times 3 + 2 = 14$

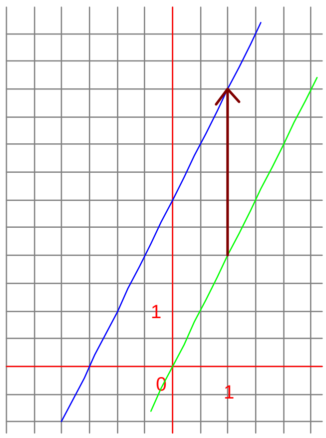
si $x = -2$ on a $y = 4 \times (-2) + 2 = -6$

La droite passe donc par les points de coordonnées (3 ; 14) et (-2 ; -6).

On vérifie ensuite que cette droite passe bien par le point (0 ;b) soit ici (0 ; 2)

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ s'obtient de celle de sa fonction linéaire associé $x \longmapsto ax$ par la translation du vecteur de coordonnées (0 ;b)

Exemple :



La représentation graphique de $x \longmapsto 2x + 3$ s'obtient de la représentation graphique de $x \longmapsto 2x$ par la translation du vecteur de coordonnées (0 ; 3)

4.4 Déterminer une fonction affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.

Problème :
Trouver f une application affine $x \longmapsto ax + b$ telle que l'image de 3 soit 9 et l'image de (-1) soit 1.

On a f(3) = 9 et f(-1) = 1 donc :

a × 3 + b = 9 et a × (-1) = 1

C'est un système a deux inconnues a et b (voir ALG 10)

$\begin{cases} 3a + b = 9 \\ -a + b = 1 \end{cases}$ on peut le facilement par l'une des deux méthodes du cours ALG10

$\begin{cases} b = 1 + a \\ 3a + 1 + a = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 + a \\ 4a = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1+2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

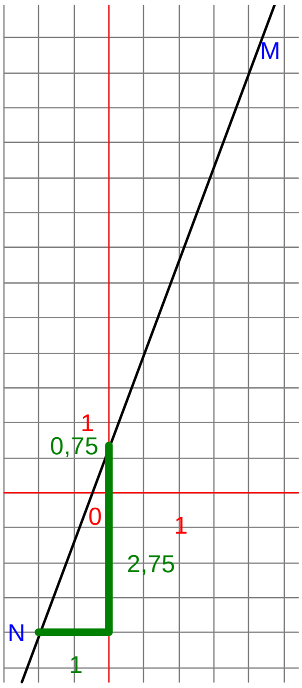
f est l'application affine $x \longmapsto 2x = 3$

Vérification : 2 × 3 + 3 = 6 + 3 = 9 et 2 × (-1) + 3 = -2 + 3 = 1

4.5 Déterminer une application affine à partir de sa représentation graphique.

Propriété : Toute droite sécante à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une application affine.

Problème : étant donnée une droite représentée dans un repère, trouver l'application affine dont elle la représentation graphique.



On peut lire les coordonnées de deux points de la droite : par exemple M (2 ; 6) et N(-1 ; -2) ;

Il s'agit alors de trouver l'application affine f telle que f(2) = 6 et f(-1) = -2
voir paragraphe 4-4

On peut aussi lire à l'intersection de l'axe des ordonnées et de la droite b l'ordonnée à l'origine : 0,75

O peut trouver le coefficient directeur en partant d'un point (N par exemple) « en avançant de 1 unité suivant l'axe des abscisses et en comptant le nombre d'unités suivant l'axe des ordonnées nécessaire pour rejoindre la droite « ici 2,75.
F serait donc $x \longmapsto 2{,}75x + 0{,}75$

Attention ces résultats ne peuvent qu'être approximatifs. Ils dépendent de la précision du tracé de la droite et de la précision de la lecture.

Notons par exemple qu'avec la méthode 2 on a f(2) = 2,75 × 2 + 0,75 = 5,50 + 0,75 = 6,25 en non pas 6
Par contre on a bien f(-1) = 2,75 × (-1) + 0,75 = -2