CHAPITRE 8
APPLICATIONS AFFINES

COMPARER DEUX QUANTITES

écart et rapport

Comparer deux nombres, c'est trouver le moyen de pouvoir dire quel est le plus grand des deux, et donc quel est le plus petit. Et, si possible, de donner plus de précision.
Comparer deux grandeurs, c'est trouver une comparaison qui convienne pour tous les cas.
Dans tous les cas, on dispose de deux moyens de comparaison : différence et quotient.
*La **différence** permet de dire combien il y a **en plus**.*
*Le quotient (que l'on appelle aussi le **rapport**) permet de dire **combien de fois** plus.*

Exemple 1 : écart constant

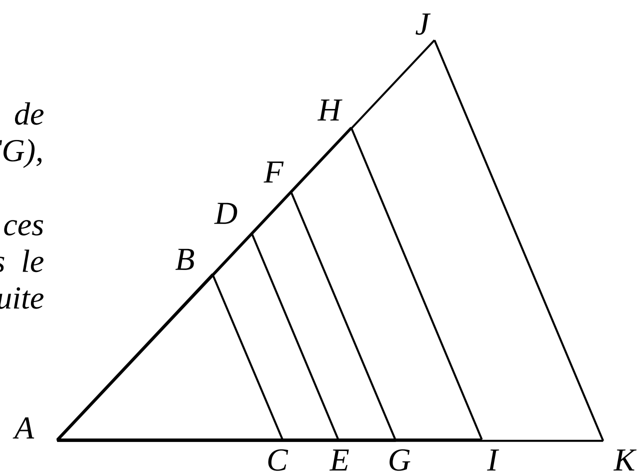
Comparons les âges pour une mère et son enfant au fil des années.
Quand l'enfant naît, la mère a 24 ans.

âge de la mère	*24*	*25*	*26*	*28*	*32*	*40*	*60*	*80*
âge de l'enfant								
***différence** d'âge entre la mère et l'enfant*								
*Age de la mère par **rapport** à celui de l'enfant*								

Que peut-on dire des différences d'âges ? Que peut-on dire des rapports des âges ?

Exemple 2 : rapport constant

Les triangles ci-contre sont construits de manière que les côtés (BC), (DE), (FG), (HI) et (JK) soient tous parallèles.
Mesurer les longueurs des côtés de ces triangles et reporter ces mesures dans le tableau ci-dessous, afin de pouvoir ensuite compléter le second tableau.



Comparaison du triangle ABC avec le triangle …			
ADE	*AFG*	*AHI*	*AJK*
AD – AB =	*AF – AB =*	*AH – AB =*	*AJ – AB =*
AE – AC =	*AG – AC =*	*AI – AC =*	*AK – AC =*
DE – BC =	*FG – BC =*	*HI – BC =*	*JK – BC =*
$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=$	$\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{FG}{BC}=$	$\frac{AH}{AB}=\frac{AI}{AC}=\frac{HI}{BC}=$	$\frac{AJ}{AB}=\frac{AK}{AC}=\frac{JK}{BC}=$

Quelles conclusions peut-on en tirer quant aux écarts et aux rapports ?

Exemple 3 : Température en degrés Fahrenheit

Dans des pays anglo-saxons, on utilise les degrés Fahrenheit pour mesurer la température.
Pour convertir les degrés centigrade en degrés Fahrenheit, on utilise le procédé suivant :

$$\text{Degrés centigrade} \xrightarrow{\div 5} \xrightarrow{\times 9} \xrightarrow{+ 32} \text{Degrés Fahrenheit}$$

$$\text{Degrés Fahrenheit} \xrightarrow{- 32} \xrightarrow{\div 9} \xrightarrow{\times 5} \text{Degrés centigrade}$$

Compléter le tableau suivant de correspondance des températures :

C *: Température en degrés centigrade*	*20°*		
F *: Température en degrés Fahrenheit*		*0°*	*100°*
Écart F – C			
Rapport $\frac{F}{C}$			

1. *Quelles conclusions peut-on en tirer quant aux écarts et aux rapports ? Existe-t-il un des deux modes de comparaison qui permette de comparer dans tous les cas ces deux systèmes de mesure ?*
2. *Si la température augmente de 18°C, de combien augmente-t-elle en degrés Fahrenheit ?*
3. *Si la température diminue de 30°F, de combien diminue-t-elle en degrés centigrade ?*

Exercice 1

Galilée a découvert en 1 610 les quatre plus gros satellites de Jupiter. C'est cette découverte, entre autres, qui le conforta dans l'idée que la Terre n'était pas au centre de l'Univers. Pour cette raison on les appelle les satellites galiléens. Ils ont pour nom : Io, Europe, Ganymède et Callisto.
Une sonde spatiale est envoyée en visite autour des satellites de Jupiter.
Elle se déplace en orbite à 100 km de la surface de ces satellites.

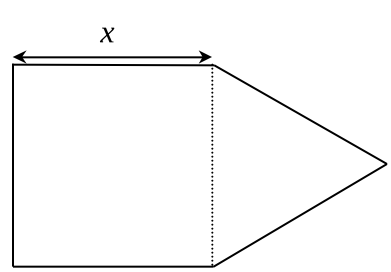
Satellite	*Io*	*Europe*	*Ganymède*	*Callisto*
Diamètre en km	*3 642*	*3 130*	*5 260*	*4 800*

Calculer pour chaque satellite la longueur de l'équateur.
Calculer la distance parcourue par la sonde en un tour autour de chaque satellite.
Comparer, pour chaque satellite les deux résultats obtenus. Y a – t il un écart ou un rapport constant?

Exercice 2

Montrer que tanα *n'est pas proportionnel à* α *.*

Exercice 3



La forme est constituée d'un triangle équilatéral collé à un carré de côté x.
Exprimer, en fonction de x, le périmètre P et l'aire ***A*** *de cette figure.*
Y a – t il proportionnalité entre P et x?
Y a – t il proportionnalité entre ***A*** *et x?*

EXEMPLES D'APPLICATIONS LINEAIRES

Pourcentages

Un pourcentage est un rapport exprimé d'une manière particulière; il s'agit de comparer une quantité à 100.

Calculer un pourcentage :

Pour exprimer simplement un pourcentage, il suffit de placer clairement le problème dans un tableau de proportionnalité à quatre nombres, dont l'un est 100.

Par exemple : Sur 835 visiteurs d'un château en une journée, 144 sont des étrangers; ce qui représente un pourcentage p que l'on cherche.

Nombre d'étrangers	144	p
Nombre total de visiteurs	835	100

Donc : $p = \frac{144}{835} \times 100 \approx 17{,}25\ \%$

Appliquer un pourcentage

Appliquer un pourcentage p % à une quantité, c'est multiplier cette quantité par p et diviser par 100.

Expression décimale d'un pourcentage :

Un pourcentage est donc avant tout une écriture particulière d'un nombre qui peut être exprimé d'une autre manière; en particulier, on peut en donner une simple écriture décimale, ou encore une écriture fractionnaire.

Par exemple, 50 % = 0,5. Donc pour calculer 50 % d'une quantité, on peut la multiplier par 0,5. Mais $50\ \% = \frac{1}{2}$ *(un demi, la moitié). On peut donc aussi diviser la quantité par 2.*

Il est bon de connaître les équivalences suivantes :

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$ $20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ $33\% \approx \frac{1}{3}$ $67\% \approx \frac{2}{3}$

Augmentation, diminution

Augmenter une quantité d'un certain pourcentage, c'est ajouter ce pourcentage aux 100% initiaux. C'est donc calculer un pourcentage supérieur à 100% de la quantité initiale.

Exemple ***ajouter 10 %, c'est calculer (100 + 10), c'est à dire 110 %*** *de la quantité initiale.*

Au contraire, ***retirer 10 %, c'est calculer (100 - 10), soit 90 %*** *de la quantité initiale.*

Augmenter de	Revient à multiplier par
10%	110% = 1,1
20%	120% = 1,2
35%	135% = 1,35
100%	200% = 2
125%	225% = 2,25
18,6%	118,6% = 1,186
0,2%	100,2% = 1,002

Retirer	Revient à multiplier par
10%	90% = 0,9
20%	80% = 0,8
35%	65% = 0,65
100%	0% = 0 (annuler)
125%	– 25% = – 0,25 (rendre négatif)
18,6%	81,4 % = 0,814
0,2%	99,8% = 0,998

Vitesses

La vitesse exprime une application linéaire entre la distance parcourue et la durée du parcours, à condition que la vitesse soit toujours la même. On parle alors de vitesse constante ou de mouvement uniforme.

Dans ce cas, la relation entre la distance D, le temps T, et la vitesse V est $V = \frac{D}{T}$

D'autre part, on peut calculer la durée et la distance par les relations qui en découlent

$$T = \frac{D}{V} \quad \text{et } D = \frac{V}{T}$$

Exemples *:*

- *Pour un train parcourant 196 km en 56 min., la vitesse moyenne est de :*

$V = \frac{196}{56} = 3{,}5$ *km / min. Pour retrouver la vitesse en km / h, il suffit de multiplier par 60.*

- *Si une voiture roule pendant 3h 40 min. à la vitesse de 110 km / h, on peut d'abord convertir la durée en heures :* $T = 3h\ 40\ min. = 3 + \frac{40}{60} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}\ h$ *, puis calculer la distance :* $D = 110 \times \frac{11}{3} \approx 403{,}33$ *km.*
- *On pourrait aussi convertir la vitesse en km / min.* $V = \frac{110}{60}$ *km / min. puis calculer la distance (T = 220 min.) :* $D = \frac{110}{60} \times 220 \approx 403{,}33$ *km.*
- *Pour parcourir à pied 24 km, à la vitesse de 4,8 km / h, il faudra :* $T = \frac{24}{4{,}8} = 5$ *h.*

Vitesse moyenne et moyenne des vitesses.

Dans la plupart des cas, il est impossible de connaître la vitesse à chaque instant d'un trajet; de même, il est difficile d'imaginer qu'une vitesse soit rigoureusement constante. On utilise donc la notion de vitesse moyenne, et l'on considère alors que cette vitesse moyenne est constante sur l'ensemble du parcours.

La vitesse moyenne sur un parcours se calcule en divisant la distance totale parcourue par la durée totale du trajet.

Exemple :*, si on parcourt un trajet aller-retour, de 80 km à 120 km/h à l'aller, et de 80 km à 80 km/h au retour.*

la distance totale : $2 \times 80 = 160$ *km.*

La durée totale du parcours 40 min. + 1h = 1h 40 min. = $\frac{5}{3}\ h \approx 1{,}667\ h$

Et la **vitesse moyenne** $V \approx \frac{160}{1{,}6667} \approx 96$ *km/h.*

Mais la **moyenne des vitesses** *est de* $\frac{120 + 80}{2} = 100$ *km/h.*

Conclusion *: lorsque la vitesse varie, en général, la moyenne des vitesses n'est pas égale à la vitesse moyenne.*

Échelle de reproduction

On utilise une échelle lorsque l'on veut reproduire un dessin en l'agrandissant, ou, au contraire en le réduisant. Toutes les dimensions de la reproduction sont alors proportionnelles à celles de l'original qui ont été multipliées par le coefficient de proportionnalité que l'on appelle, dans ce cas, l'échelle de la reproduction.
Cette échelle est habituellement exprimée par une fraction dont l'un des termes est 1.
Une échelle de $\frac{1}{1\ 000}$ *(on dit 1 pour 1 000 ou 1 millième) signifie que les distances sur la reproduction sont 1 000 fois plus petites que les distances réelles.*
Une échelle de $\frac{5}{1}$ *(5 pour 1) signifie que les distances sur la reproduction sont agrandies 5 fois.*
Une échelle de reproduction est un coefficient de proportionnalité entre les distances réelles et les distances reproduites.

Taille réelle ¾¾→ *Reproduction*
× *échelle*

Si l'échelle est une fraction plus petite que 1, il y a une réduction.
Si l'échelle est une fraction plus grande que 1, il y a un agrandissement.

Débits

Un débit mesure un écoulement. On emploie par exemple l'expression débit rapide ou débit monotone pour exprimer la quantité de mots que l'on prononce pendant un certain temps.
Mais le débit dont on parle ici concerne par exemple une quantité de fluide qui s'écoule ou qui est fournie par unité de temps (débit d'un cours d'eau, ou d'une pompe).
Ou encore d'une quantité de personnes, de véhicules, d'informations, transportées en une unité de temps.(nombre de voyageurs par heure sur une ligne de chemin de fer, nombre de véhicules par heure sur une autoroute, nombre de bits par seconde transmis par un modem , etc.)
Par exemple si un robinet verse 3 litres en 12 secondes, le débit du robinet est de $\frac{3}{12}$*, soit 0,25 litres par seconde.*

Densités

La densité d'un corps est le rapport de la masse d'un certain volume de ce corps à celle du même volume d'eau (s'il s'agit d'un solide) ou du même volume d'air (s'il s'agit d'un gaz).
Par exemple si un litre d'huile pèse 870 g, sa densité est de 0,87 car un litre d'eau pèse 1 kg.
En géographie, la densité de population est le nombre moyen d'habitants par unité de surface.
Par exemple la France qui compte environ 58 200 000 habitants sur une superficie d'environ 549 000 km_ a une densité de population d'environ $\frac{58\ 200\ 000}{549\ 000}$ *, ce qui donne environ 106 habitants au km_.*

APPLICATIONS AFFINES

Tableau de valeurs

Une application affine (on dit aussi fonction affine) est un modèle de calcul du premier degré qui transforme toute valeur par deux opérations successives : une multiplication, puis une addition.

Valeur de x |¾ × a ¾→ *ax* |¾ + b ¾→ *ax + b* *Image de x*

Exemples

1. Soit f l'application affine définie par : x |¾¾→ 3x – 5

Valeur de x	*|¾ × 3 ¾→ 3x*	*|¾ – 5 ¾→ 3x – 5*	*Couple de valeurs associées*
0	*0*	*– 5*	*(0 ; – 5)*
– 3	*– 9*	*– 14*	*(– 3 ; – 14)*
+ 4	*12*	*7*	*(4 ; 7)*
1	*3*	*– 2*	*(1 ; – 2)*
2	*6*	*1*	*(2 ; 1)*

On obtient des couples de valeurs associées par l'application affine. Ces couples sont les coordonnées de points que l'on peut placer dans un repère. (voir paragraphe suivant)

Notation *: Si f est le nom de l'application, on écrit f(0) = – 5 pour signifier que l'image de 0 par f est – 5. De même : f(– 3) = – 14 ; f(4) = 7 ; f(1) = – 2 ; f(2) = 1.*
D'une manière générale : ***f(x) = 3x – 5****. (on lit "f de x" au sens de "l'image par f de x")*

Compléter les tableaux de valeurs ci – dessous :

2. Soit f_1 l'application affine définie par : x |¾¾→ – 2x + 1

Valeur de x	*|¾ × (– 2) ¾→ – 2x*	*|¾ + 1 ¾→ – 2x + 1*	*Couple de valeurs associées*
– 4			
0			
+ 3			
1			
2			

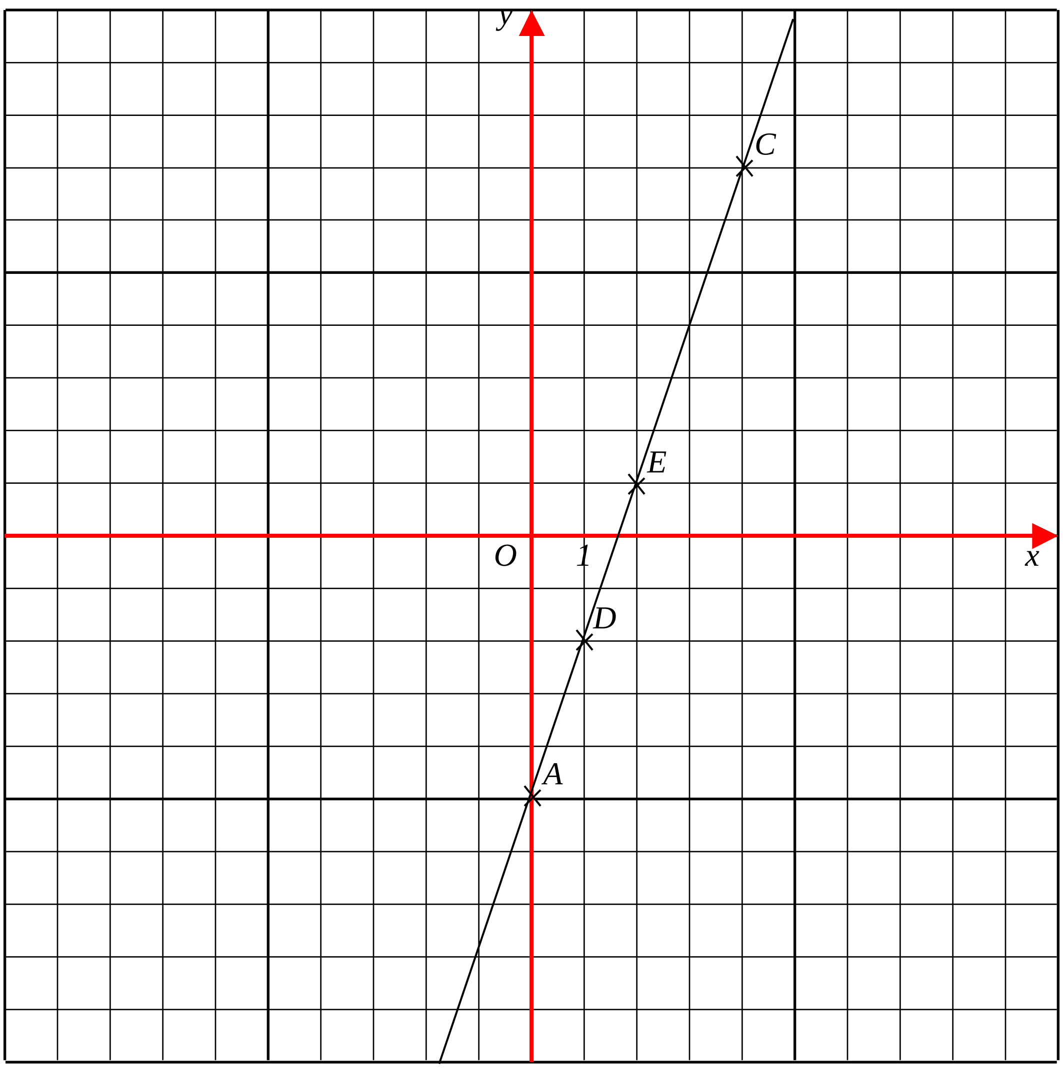
3. Soit f_2 l'application affine définie par : x |¾¾→ $-\frac{1}{2}x - 3$

Valeur de x	*|¾ × ($-\frac{1}{2}$) ¾→ $-\frac{1}{2}x$*	*|¾ – 3 ¾→ $-\frac{1}{2}x - 3$*	*Couple de valeurs associées*
– 2			
0			
+ 2			
– 6			
+ 4			

Représentation graphique

Dans chacun des trois exemples ci – dessus, on obtient des couples de valeurs associées par l'application affine. Ces couples sont les coordonnées de points que l'on place dans un repère.

$f(x) = 3x - 5$	Couple de valeurs associées		Point sur le graphique
	$(0 ; -5)$	$\longrightarrow$	A
	$(-3 ; -14)$	$\longrightarrow$	B
	$(4 ; 7)$	$\longrightarrow$	C
	$(1 ; -2)$	$\longrightarrow$	D
	$(2 ; 1)$	$\longrightarrow$	E



Les points sont alignés.
De la même manière, placer les points dont les coordonnées sont des valeurs associées par les applications affines f_1 et f_2 du paragraphe précédent.

LA LEÇON

Applications linéaires

Définitions

*Si entre deux quantités **le rapport est constant**, on dit que ces deux grandeurs sont **proportionnelles**. (k est le coefficient de proportionnalité).*
*Lorsque deux quantités sont proportionnelles, on **applique** le même procédé de calcul pour toutes les valeurs possibles de l'une ou l'autre de ces quantités.*
*Il consiste à multiplier les valeurs de l'une des deux quantités par un coefficient constant. On parle alors **d'application linéaire**.*

$$x \;\underset{\div\, k}{\overset{\times\, k}{\rightleftarrows}}\; y = kx$$

Vocabulaire :
*k est le **coefficient** de proportionnalité.*
*Le couple (x ; y) forment un couple de **valeurs associées**.*
*Si (x ; y) est un couple de valeurs associées, on peut **calculer le coefficient** de proportionnalité en divisant y par x . $k = \frac{y}{x}$*

Propriétés des applications linéaires

*Un tableau de proportionnalité n'est qu'une **manière pratique** de présenter une situation de proportionnalité. Il permet néanmoins quelques réflexes qui rendent parfois plus rapides les solutions aux problèmes. Rappelons les méthodes essentielles :*

A	*a*	*b*
B	*x*	*y*

- *Pour que les grandeurs A et B soient proportionnelles, il est suffisant que ay = bx (c'est ce que l'on appelle parfois le **produit en croix**).*
- *Si A et B sont proportionnelles, on peut multiplier une colonne par un nombre.*
- *Si A et B sont proportionnelles, on peut ajouter ou soustraire des colonnes.*

*Deux rapports égaux forment une **proportion**. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. C'est équivalent à un tableau de proportionnalité à quatre nombres : on a multiplié a par le coefficient k pour obtenir b, et ce coefficient k se calcule par le quotient $\frac{b}{a}$. On doit donc multiplier a' par le même* *coefficient k. On obtient donc :* $b' = a' \times \frac{b}{a}$. *De la même manière, on obtient chacun des trois autres nombres :* $a' = b' \times \frac{a}{b}$ $\quad a = b \times \frac{a'}{b'}$ $\quad b = a \times \frac{b'}{a'}$

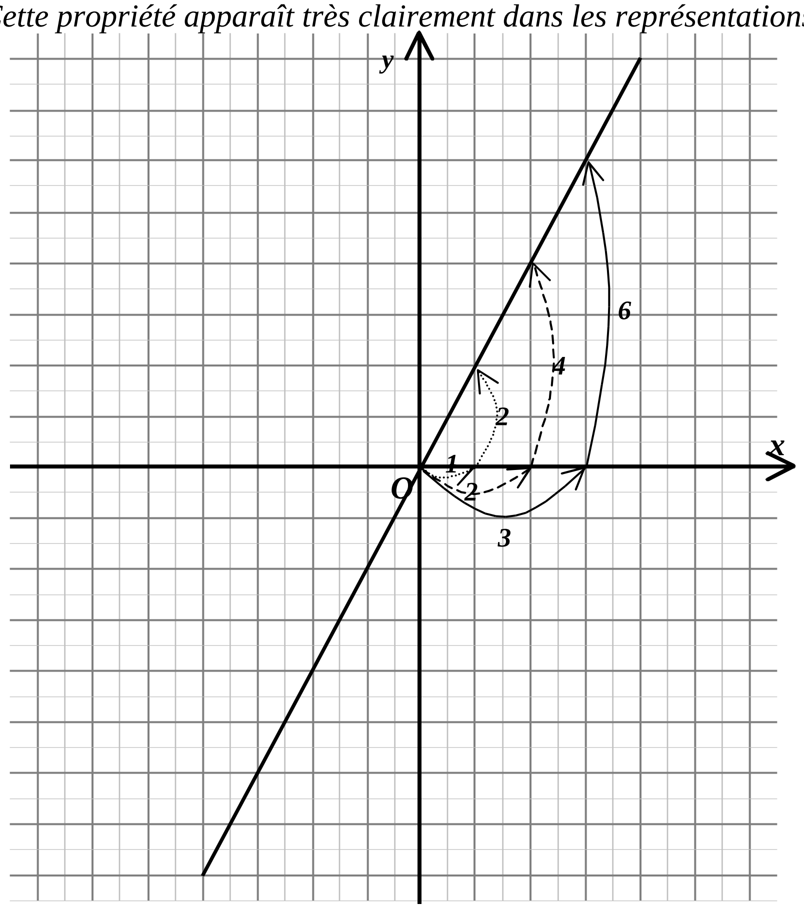
Une application linéaire est une multiplication par un coefficient constant. On retrouve donc quelques unes des propriétés de la multiplication.

L'image de la somme de deux nombres est égale à la somme des images de chacun de ces deux nombres.

En effet, si $y = kx$ *et* $y' = kx'$*, alors* $y + y' = kx + kx' = k(x + x')$
$y + y'$ *est la somme des images de x et x'.*
$k(x + x')$ *est l'image de la somme de x et x'.*
On retrouve ainsi la règle de la distributivité du produit sur la somme.
On retrouve aussi l'idée que dans un tableau de proportionnalité, on peut ajouter deux colonnes.

L'image du produit d'un nombre x par a est égale au produit par a de l'image du nombre x.

En effet, si $y = kx$*, alors* $a \times y = a \times kx = k \times ax$.
On retrouve ainsi l'idée que dans un tableau de proportionnalité, on peut multiplier les deux nombres d'une colonne par un même nombre.
Cette propriété apparaît très clairement dans les représentations graphiques :

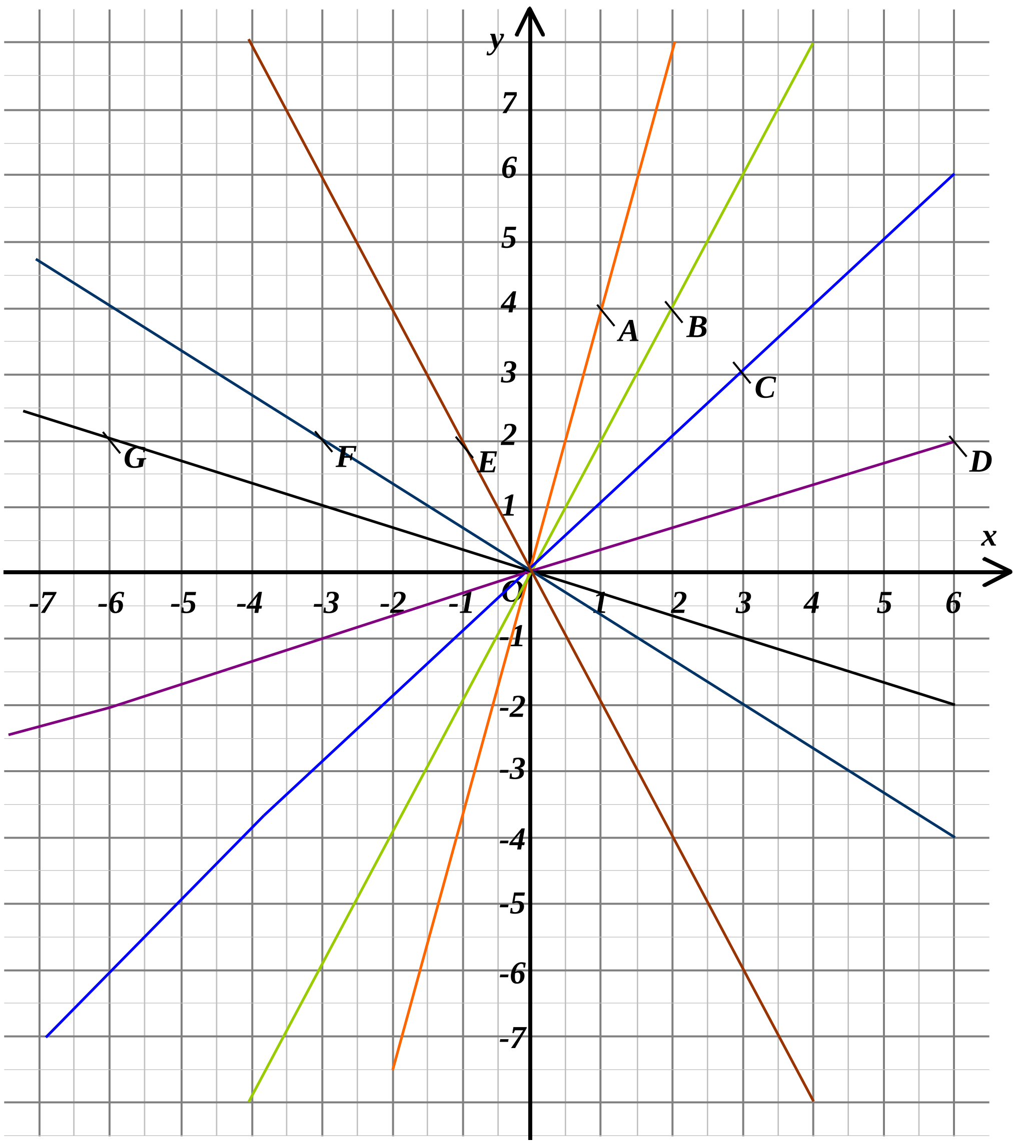


Sur la droite ci contre représentant l' appl. linéaire $y = 2x$*, on constate que si x est 2 fois plus grand, son image aussi. Si x est 3 fois plus grand, son image aussi. Etc. La droite est fabriquée comme en escalier, ce qui permet une plus grande précision dans le tracé si on place un maximum de points.*

Représentations graphiques

Dans un repère orthonormé, les couples de valeurs associées par une application linéaire forment les couples de coordonnées de points.
Pour une même relation, ***les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.***
En effet, l'image de 0 est toujours 0. Donc le point (0 ; 0) qui est l'origine du repère est un point de toutes les représentations graphiques d' application linéaire.
Pour obtenir la droite qui représente une application linéaire, il ***suffit*** *de connaître un* ***second point*** *puisque deux points suffisent pour tracer une droite.*
N'importe quel couple de valeurs associées convient, mais il y en a un qui est plus simple à connaître que tous les autres ;c'est le point qui a pour coordonnées 1 et son image qui n'est autre que le coefficient k de la relation.

Conclusion *: Une application linéaire est représentée graphiquement par la droite (OK) où O est l'origine du repère, et K le point de coordonnées (1 ; k).*



Pour déterminer l'application linéaire associée à une droite passant par l'origine, il suffit de connaître les coordonnées d'un point de cette droite.

Par exemple :
A a pour coordonnées (1 ; 4). Le coefficient de proportionnalité associée à la droite (OA) est donc 4÷ 1 = 4. Cette relation est y = 4x.
*4 est appelé le **coefficient directeur** ou **la pente** de la droite (OA).*

Droite	Point	Coefficient directeur	Application linéaire associée
(OB)	B : (2 ; 4)	$4 \div 2 = 2$	$y = 2x$
(OC)	C : (3 ; 3)	$3 \div 3 = 1$	$y = x$
(OD)	D : (6 ; 2)	$2 \div 6 = \frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{3}x$
(OE)	E : (-1 ; 2)	$2 \div (-1) = -2$	$y = -2x$
(OF)	F : (-3 ; 2)	$2 \div (-3) = -\frac{2}{3}$	$y = -\frac{2}{3}x$
(OG)	G : (-6 ; 2)	$2 \div (-6) = -\frac{1}{3}$	$y = -\frac{1}{3}x$

Applications affines

Une application affine (on dit aussi fonction affine) est un modèle de calcul du premier degré qui transforme toute valeur par deux opérations successives : une multiplication, puis une addition.
La forme générale d'une application affine : $f : x \longmapsto f(x) = ax + b$
f(x) se lit f de x et désigne l'image par f de la valeur x.
(x ; f(x)) est un couple de valeurs associées par l' application affine.

Une application affine est représentée dans un repère par une droite qui est parallèle à la droite représentant l'application linéaire qui à x associe ax.
*Le nombre a est le coefficient directeur (on dit aussi la **pente**) de la droite , et par extension, de l'application affine.*
*Le nombre b est l'image de 0. f(0) = b. On l'appelle **l'ordonnée à l'origine** car le point de coordonnées (0 ; b) est situé au niveau de l'origine sur l'axe des ordonnées. C'est le point d'intersection de l'axe des ordonnées et de la droite.*

EXERCICES

Exercice 1

Compléter le tableau suivant donnant les images des nombres –1,5 , - _ , 0 , 1, _ , et 2 par chacune des applications linéaires proposées.

	–1,5	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	2
$x \longmapsto 3x$						
$x \longmapsto -2x$						
$x \longmapsto \frac{1}{4}x$						
$x \longmapsto -\frac{3}{4}x$						
$x \longmapsto 0{,}3x$						

Exercice 2

Indiquer pour chacun des tableaux, s'il s'agit d'un tableau de proportionnalité et, si c'est le cas, exprimer la application linéaire associée, traduisant la correspondance entre la première et la seconde ligne.

Tableau 1

5	10	15	20
10	15	20	25

Tableau 3

1,5	2	2,5	3
4,5	6	7,5	9

Tableau 2

30	33	36	39
10	11	12	13

Tableau 4

7	14	21	35
1	2	3	4

Exercice 3

Dans chacun des cas, on connaît un nombre et son image par une application linéaire. Déterminer son coefficient et l'exprimer sous la forme la plus simple possible.

$8 \longmapsto -64$ $\quad 9 \longmapsto 6$ $\quad 7 \longmapsto 4{,}9$ $\quad 11 \longmapsto -32$

$0{,}3 \longmapsto 12$ $\quad 1{,}2 \longmapsto 0{,}4$ $\quad -2{,} \longmapsto -8$ $\quad 25 \longmapsto -5$

Exercice 4

Compléter les tableaux de valeurs des applications linéaires en utilisant les propriétés de la linéarité.

Application 1				
3	36	18	4	-2
		63		

Application 2				
2	4	-4	10	
	5			-15

Exercice 5

Donner les applications linéaires associées aux situations suivantes utilisant des pourcentages :

1. *Augmenter de 25%*
2. *Diminuer de 20%*
3. *Diminuer de 4%*
4. *Augmenter de 10%*
5. *Diminuer de 75%*

Exercice 6

Traduire chacune de ces applications linéaires par une variation en pourcentage :

$x \mapsto 1,35x$ $\quad x \mapsto 0,98x$ $\quad x \mapsto \frac{3}{2}x$ $\quad x \mapsto \frac{3}{4}x$ $\quad x \mapsto 1,01\,x$

$x \mapsto 0,86x$ $\quad x \mapsto 1,31x$ $\quad x \mapsto \frac{4}{9}x$ $\quad x \mapsto \frac{5}{8}x$ $\quad x \mapsto 1,002x$

Exercice 7

Les points suivants dont on donne les cordonnées sont-ils situés sur la droite représentant graphiquement l'application linéaire $x \mapsto -0,75x$ *?*

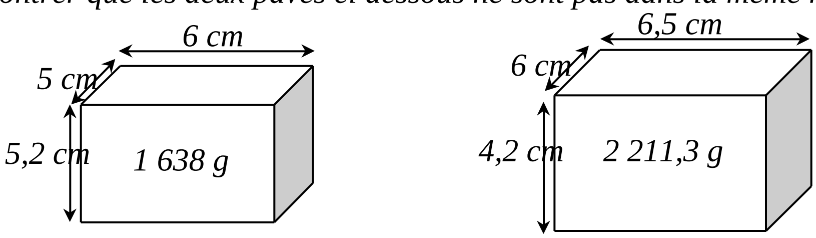
A (-1 ; 0,75) *B (-2 ; 3/2)* *C (-0,2 ; - 0,15)* *D (- 4/3 ; 1)*

Exercice 8

1. *Si on parcourt 124 km en 1h 24 min., combien de temps faudra - t - il pour parcourir 217 km dans les mêmes conditions?*

2. *Quel est le pourcentage de réduction si un article initialement au prix de 320 Fr. est soldé à 272 Fr.?*

3. *Montrer que les deux pavés ci dessous ne sont pas dans la même matière.*

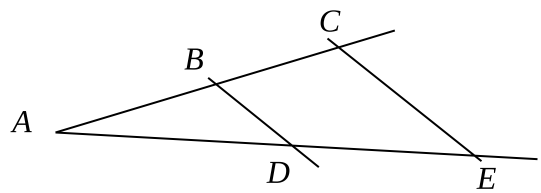


Pavé 1 *Pavé 2*

Quelle serait la masse de pavés de mêmes dimensions s'ils étaient, chacun, constitué de la matière de l'autre pavé?

4. *Les longueurs sont en cm. ABC est un triangle de hauteur AH (H est un point de [BC]) tel que BC = 6 et AH = 4. On augmente les dimensions du triangle ABC pour obtenir un nouveau triangle AB'C' avec B' sur [AB], C' sur [AC], de sorte que (B'C') soit parallèle à (BC) et que B'C' = 9. (AH) coupe (B'C') en H'. Faire une figure présentant la situation. Quelle est l'augmentation en pourcentage de l'aire du triangle quand on passe de ABC à AB'C'?*

5. *Calculer la longueur AB sachant que (BD) // (CE), et que BC = 4 , BD = 5 et CE = 12.*



6. *On augmente la longueur d'un rectangle de 15%, et l'on diminue sa largeur de 15 %. Que se passe - t - il pour l'aire de ce rectangle ?*

Exercice 9

Associer chacune des droites représentées à l'une des applications linéaires proposées.

$y = 3x$

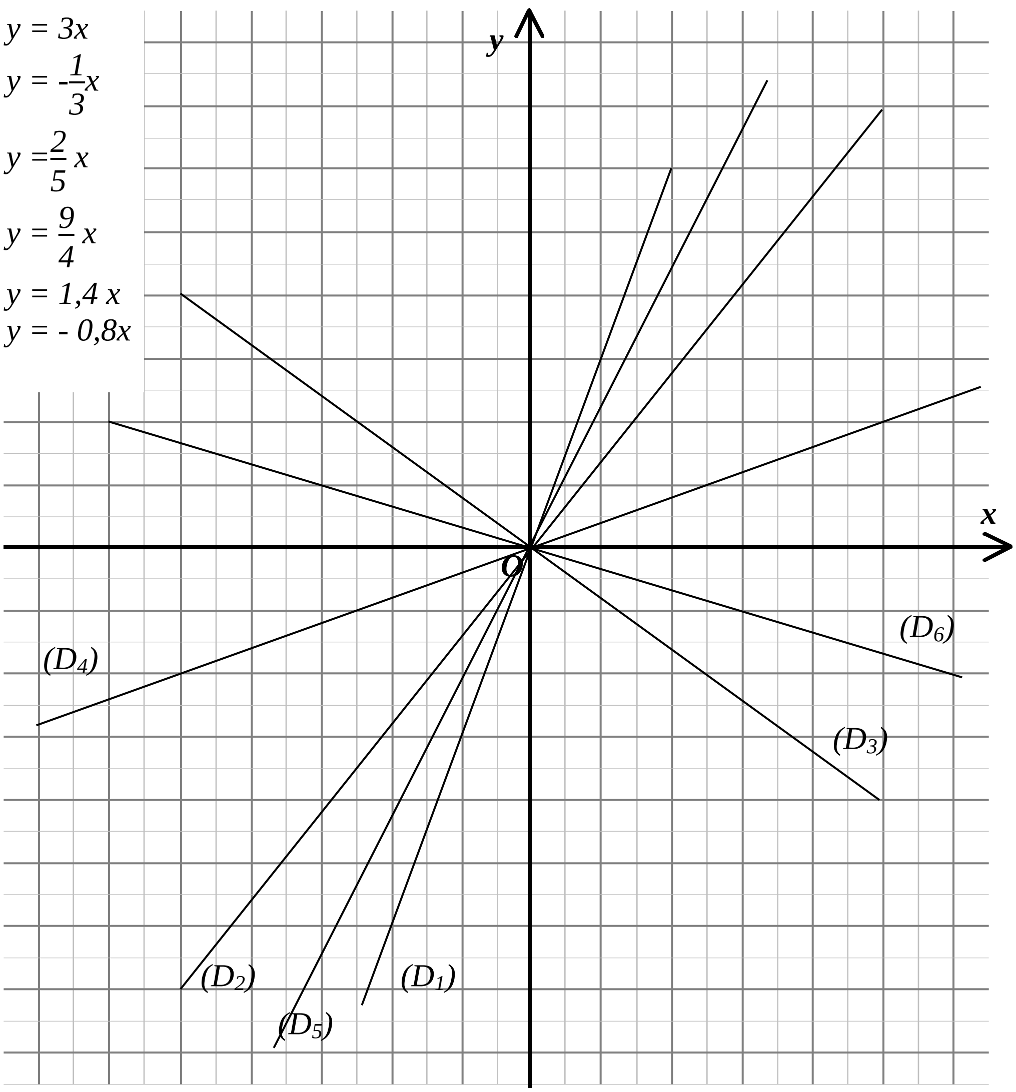
$y = -\frac{1}{3}x$

$y = \frac{2}{5}x$

$y = \frac{9}{4}x$

$y = 1{,}4\,x$

$y = -\,0{,}8x$



Exercice 10

Compléter le tableau de double proportionnalité donnant le montant des taxes en francs en fonction de la somme et du taux de taxe.

Somme →	100	600	160	
Taux ↓				
4,5 %				
		36		
9%				23,85
18,6%				

Exercice 11

Parmi les procédés de calcul décrits ci-dessous, quels sont ceux qui expriment une application linéaire ?

$x \mapsto 2x$ $x \mapsto x$_ $x \mapsto 3x - 5x$ $x \mapsto 7x - 4$ $x \mapsto 1{,}01\,x$

$x \mapsto -\dfrac{x}{5}$ $x \mapsto 4x \times \dfrac{x}{2}$ $x \mapsto -2x + 3$

$x \mapsto 3x$_ $- 3x(x-1)$ $x \mapsto 1 - \dfrac{x}{2}$ $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ $x \mapsto -\dfrac{x}{5}$

Exercice 12

Replacer correctement les différentes cases des deux dernières colonnes du tableau :

x	¾× →	k	→	kx

Distance sur le terrain		Échelle de la carte		Taux de placement
Capital placé		Intérêts du capital		Vitesse moyenne
Durée du parcours		Distance sur la carte		Masse de l'objet
Volume d'un objet		Débit moyen		Masse volumique
Durée de l'écoulement		Volume écoulé		Distance parcourue

Exercice 13

Compléter le tableau suivant :

Distance (en km)	195		700	235
Heure de départ	8h	16h55	15h15	20h35
Heure d'arrivée	9h30	19h10		
Vitesse moyenne (en km/h)		20	600	75

Exercice 14

En navigation, on utilise le nœud comme unité de vitesse.
Sachant que 50 nœuds correspondent à 92,6 km/h, exprimer les deux applications linéaires qui permettent :

1. *De transformer les nœuds en km/h*
2. *De transformer les km/h en nœuds.*

Exercice 15
Compléter le tableau ci-dessous donnant pour chaque fleuve le volume d'eau écoulé en m^3 en fonction du temps et du débit moyen

Temps (en s)→ Fleuve↓	60	5		
Garonne				720×10^3
Loire			720×10^3	
		$1{,}875 \times 10^3$		
	102×10^3			

Débit moyen (m^3/s)	
Rhin	2210
Rhône	1700
Loire	800
Seine	375
Garonne	200

Exercice 16
Si le côté d'un carré augmente de 3% :
1. *De quel pourcentage augment le périmètre de ce carré ?*
2. *De quel pourcentage augmente l'aire de carré ?*

Exercice 17
Déterminer, dans chaque cas, l'application affine vérifiant les conditions proposées.
1. *f est représentée par la droite passant par les points (-2 ; 5) et (3 ; - 1)*
2. *g est telle g(0) = 4 et g(-3) = 6*
3. *h est représentée par (D) de pente* $-\frac{2}{3}$ *et passant par le point (1 ; 3)*
4. *l est telle que l(5) - l(1) = 3 et l(0) = 1*

Exercice 18
Dans un repère, représenter les applications affines suivantes:

(D_1) $y = -2x + 3$
(D_2) $y = \frac{1}{3}.x - 2$
(D_3) $y = 3x - 1$
(D_4) $y = -\frac{1}{2}.x + \frac{2}{3}$

Exercice 19
Dans un même repère, d'unité 2 cm, tracer les droites associées aux applications affines suivantes :

(D_1) $y = x + 2$ (D_3) $y = -x + 1$ (D_5) $y = 5x - 3$

(D_2) $y = x - 3$ (D_4) $y = 2x - 2$ (D_6) $y = - \_x + 4$

CORRIGES DES EXERCICES

ACTIVITES

Comparer deux quantités : Exemple 1 : écart constant

âge de la mère	*24*	*25*	*26*	*28*	*32*	*40*	*60*	*80*
âge de l'enfant	*0*	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*	*36*	*56*
différence d'âge entre la mère et l'enfant	*24*	*24*	*24*	*24*	*24*	*24*	*24*	*24*
*Age de la mère par **rapport** à celui de l'enfant*		*25*	*13*	*7*	*4*	*2,5*	*1,67*	*1,43*

1. *Les différences d'âges restent bien sûr constantes au fil des ans. 24 ans entre la mère et l'enfant ;*
2. *Les rapports des âges, eux, diminuent avec le temps.*

Exemple 2 : rapport constant

Comparaison du triangle ABC avec le triangle …			
ADE	*AFG*	*AHI*	*AJK*
AD – AB =	*AF – AB =*	*AH – AB =*	*AJ – AB =*
AE – AC =	*AG – AC =*	*AI – AC =*	*AK – AC =*
DE – BC =	*FG – BC =*	*HI – BC =*	*JK – BC =*
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} =$	$\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{FG}{BC} =$	$\frac{AH}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{HI}{BC} =$	$\frac{AJ}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{JK}{BC} =$

1. *Conclusions les écarts sont très variables, alors que les rapports sont en général assez proches au dixième près. C'est à dire que pour passer d'un triangle à un autre, on multiplie les longueurs par un nombre constant. (aux approximations près, dues à l'inévitable inexactitude des mesures.)*

Exemple 3 : Température en degrés Fahrenheit

***C** : Température en degrés centigrade*	*20°*	***– 18°***	***≈ 37,8°***
***F** : Température en degrés Fahrenheit*	***68°***	*0°*	*100°*
Écart F – C	***48***	***18***	***62,2***
Rapport $\frac{F}{C}$	***3,4***	***0***	***≈ 2,6***

1. *Conclusions : Les écarts et les rapports varient tous les deux sans règle particulière. Aucun des deux modes de comparaison ne permet de comparer dans tous les cas ces deux systèmes de mesure.*
2. *Si la température augmente de 18°C, elle passe de x à (x + 18)°C ; alors la température en °F passe de* $\frac{9}{5}x + 32$ *à* $\frac{9}{5}(x + 18) + 32 = \frac{9}{5}x + 32 + \frac{9 \times 18}{5}$*, soit une augmentation de 32,4°F.*
3. *Si la température diminue de 30°F, elle passe de y à (y – 30)°F. Alors la température en degrés centigrade passe de* $\frac{5}{9}(y - 32)$ *à* $\frac{5}{9}(y - 30 - 32) = \frac{5}{9}(y - 32) - \frac{5 \times 30}{9}$ *, soit une diminution d'environ 16,7°C.*

Exercice 1

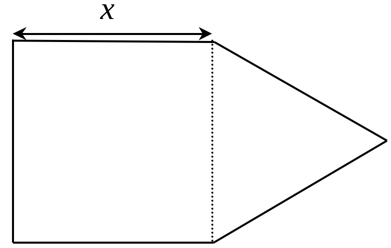
Satellite	*Io*	*Europe*	*Ganymède*	*Callisto*
Diamètre en km	*3 642*	*3 130*	*5 260*	*4 800*
Longueur de l'équateur : E	*11 442*	*9 833*	*16 525*	*15 080*
Rayon du cercle parcouru par la sonde	*1 921*	*1 665*	*2 730*	*2 500*
distance parcourue par la sonde en un tour : D	*12 070*	*10 462*	*17 153*	*15 708*
Écart D – E	*628*	*629*	*628*	*628*
Rapport $\frac{D}{E}$	*1,055*	*1,064*	*1,038*	*1,042*

Les écarts sont constants (628 km); alors que le rapport diminue quand le diamètre du satellite augmente.

Exercice 2

*Tan*α *n'est pas proportionnel à* α *, car, par* ***exemple*** *tan30 =* $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *et tan60 =* $\sqrt{3}$ *. Donc pour un angle deux fois plus grand, la tangente est trois fois plus grande.*

Exercice 3

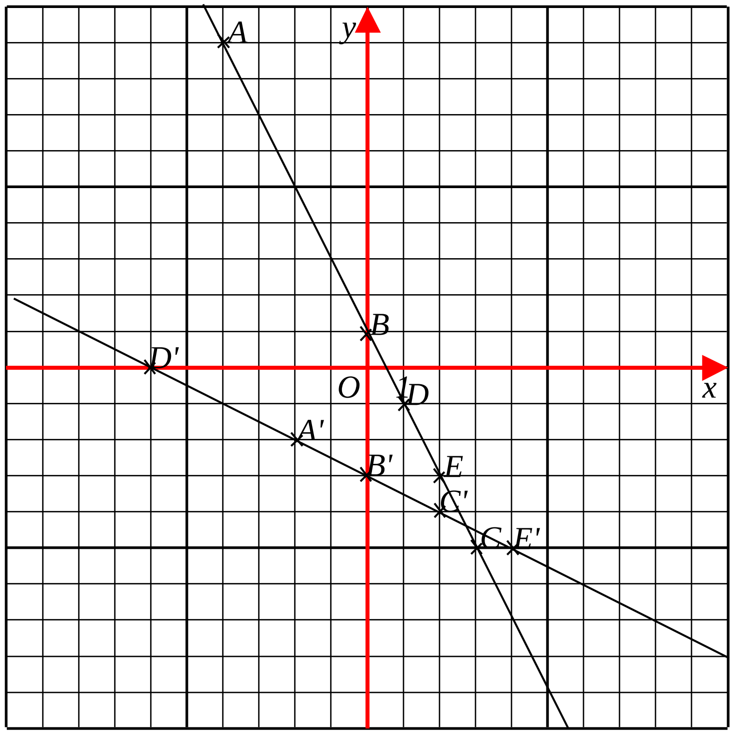


La forme est constituée d'un triangle équilatéral collé à un carré de côté x.
Périmètre P = 5x
Aire ***A*** *= x_ +* $\frac{\sqrt{3}}{4}$ *x_ = (1 +* $\frac{\sqrt{3}}{4}$ *)x_*
Il y a proportionnalité entre P et x. Le coefficient est 5.
Il n'y a pas proportionnalité entre ***A*** *et x, car x intervient au carré.*

Tableau de valeurs

Valeur de x	*|¾ × (– 2) ¾→ – 2x*	*|¾ + 1 ¾→ – 2x + 1*	*Couples de valeurs associées*
– 4	*8*	*9*	*(– 4 ; 9)*
0	*0*	*1*	*(0 ; 1)*
+ 3	*– 6*	*– 5*	*(3 ; – 5)*
1	*– 2*	*– 1*	*(1 ; – 1)*
2	*– 4*	*– 3*	*(2 ; – 3)*
Valeur de x	*|¾ × (–* $\frac{1}{2}$*) ¾→ –* $\frac{1}{2}$*x*	*|¾ – 3 ¾→ –* $\frac{1}{2}$ *x – 3*	*Couples de valeurs associées*
– 2	*+ 1*	*– 2*	*(– 2 ; – 2)*
0	*0*	*– 3*	*(0 ; – 3)*
+ 2	*– 1*	*– 4*	*(2 ; – 4)*
– 6	*+ 3*	*0*	*(– 6 ; 0)*
+ 4	*– 2*	*– 5*	*(4 ; – 5)*

Représentation graphique :



Exercices

Exercice 1

	–1,5	- _	0	1	_	2
x |¾¾→ 3*x*	- 4,5	- 1,5	0	3	2,25	6
x |¾¾→ -2*x*	3	1	0	- 2	- 1,5	- 4
x |¾¾→ $\frac{1}{4}x$	-0,375	-0,125	0	0,25	0,1875	0,5
x |¾¾→ $-\frac{3}{4}x$	1,125	0,375	0	-0,75	-0,5625	-1,5
x |¾¾→ 0,3*x*	-0,45	-0,15	0	0,3	0,225	0,6

Exercice 2

Tableau 1

5	10	15	20
10	15	20	25

Pas proportionnalité

Tableau 2

30	33	36	39
10	11	12	13

On multiplie par $\frac{1}{3}$

Tableau 3

1,5	2	2,5	3
4,5	6	7,5	9

x ¾→ 3*x*

Tableau 4

7	14	21	35
1	2	3	4

pas de proportionnalité.

Exercice 3

8 |¾¾→ - 64	*Coefficient : - 8*
9 |¾¾→ 6	*Coefficient :* $\frac{2}{3}$
7|¾¾→ 4,9	*Coefficient : 0,7*
11 |¾¾→ -32	*Coefficient :* $-\frac{32}{11}$
0,3 |¾¾→ 12	*Coefficient : 40*
1,2 |¾¾→ 0,4	*Coefficient :* $\frac{1}{3}$
- 2,5 |¾¾→ - 8	*Coefficient : 3,2*
25 |¾¾→ - 5	*Coefficient : - 5*

Exercice 4

Relation 1				
3	36	18	4	-2
10,5	126	63	14	- 7

Relation 2				
2	4	-4	10	- 12
2,5	5	- 5	12,5	-15

Exercice 5

1. *Augmenter de 25%* × *1,25*
2. *Diminuer de 20%* × *0,8*
3. *Diminuer de 4%* × *0,96*
4. *Augmenter de 10%* × *1,1*
5. *Diminuer de 75%* × *0,25*

Exercice 6

$\times 1,35$	*augmentation de 35%*
$\times 0,98$	*diminution de 2%*
$\times \frac{3}{2}$	*augmentation de 50%*
$\times \frac{3}{4}$	*diminution de 25%*
$\times 1,01$	*augmentation de 1%*
$\times 0,86$	*diminution de 14%*
$\times 1,31$	*augmentation de 31%*
$\times \frac{4}{9}$	*diminution de* $\frac{5}{9}$*, soit 55,6%*
$\times \frac{5}{8}$	*diminution de* $\frac{3}{8}$*, soit 37,5%*
$\times 1,002$	*augmentation de 0,2%*

Exercice 7

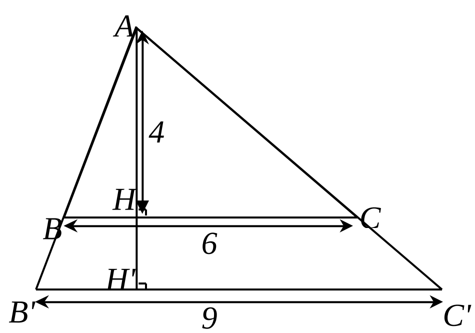
Seul le point C n'est pas sur la droite car ses coordonnées doivent être de signes différents.

Exercice 8

❶ *On parcourt 124 km en 1h 24 min., c'est à dire en 84 min. soit* $\frac{84}{124}$ *min. pour 1 km. Et donc il faudra :* $217 \times \frac{84}{124}$*, = 147 min. = 2h 27 min. pour parcourir 217 km .*

❷ *un article initialement au prix de 320 Fr. est soldé à 272 Fr., ce qui représente* $\frac{272}{320}$*, soit 85% du prix initial. La réduction est donc de 15%*

❸	Pavé 1	Pavé 2
Volume	$156\ cm^3$	$163,8\ cm^3$
Masse par cm^3	10,5 g	13,5 g
Les masses sont différentes par unité de volume. Ce ne peut pas être la même matière.		
Masse dans l'autre matière	2 106 g	1 719,9 g



❹ *Calcul de la hauteur AH' du triangle AB'C' :*

Les droites (BC) et (B'C') étant parallèles, il y a proportionnalité entre les dimensions de ABC et de AB'C'. $\frac{AH'}{AH} = \frac{AC'}{AC}$ *, et* $\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ *, donc* $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$ *; d'où :* $AH' = \frac{9}{6} \times 4 = \mathbf{6}$

Calcul des aires :

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH =$ **12 cm_** $\mathcal{A}_{AB'C'} = \frac{1}{2} B'C' \times AH' =$ **27 cm_**

Augmentation de l'aire :

L'aire augmente de 15 cm_. Ce qui représente : $\frac{15}{12} =$ **125% d'augmentation**.

❺ *(BC) // (CE), donc* $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$. $\frac{CE}{BD} = \frac{12}{5} = 2,4$. *Donc* $\frac{AC}{AB} = 2,4$ *, d'où* $AC = 2,4 \times AB$.

$AC = AB + BC = 2,4 \times AB$ *, donc* $BC = 1,4 \times AB$ *, d'où* $AB = \frac{BC}{1,4} = \frac{4}{1,4} = \frac{40}{14} = \boldsymbol{\frac{20}{7} \approx 2,9}$

❻ *On augmente la longueur d'un rectangle de 15%, et l'on diminue sa largeur de 15 %. Que se passe - t - il pour l'aire de ce rectangle ? On augmente la longueur d'un rectangle de 15%, et l'on diminue sa largeur de 15 %. On compare les aires des deux rectangles*

	initialement	*Après transformation*
Longueur :	*L*	$L \times 1,15$ *, car ajouter 15% revient à multiplier par 1,15*
Largeur :	*l*	$l \times 0,85$ *, car retirer 15% revient à multiplier par 0,85*
Aire :	$A = L \times l$	$A' = L \times 1,15 \times l \times 0,85$ $= L \times l \times 1,15 \times 0,85$ $= A \times 0,9775 = A \times 97,75\ \%$

L'aire de ce rectangle ***<u>diminue de 2,25 %</u>*** *. (car 100 - 97,75 = 2,25)*

Exercice9

$(D_1)\ y = 3x$ $(D_2)\ y = 1,4x$ $(D_3)\ y = -0,8x$ $(D_4)\ y = \frac{2}{5}x$

$(D_5)\ y = \frac{9}{4}x$ $(D_6)\ y = -\frac{1}{3}x$

Exercice 10

Somme → *Taux ↓*	*100*	*600*	*160*	*265*
4,5 %	*4,5*	*27*	*7,2*	*11,925*
6%	*6*	*36*	*9,6*	*15,9*
9%	*9*	*54*	*14,4*	*23,85*
18,6%	*18,6*	*111,6*	*29,76*	*49,29*

Exercice 11

Il y a cinq applications linéaires : $y = 2x$ $y = 3x-5x=-2x$ $y= 1,01x$

$Y=-\frac{x}{5}$ $y=3x\_-3x(x-1)=3x$.

Exercice 12

x	¾× →	*k*	→	*kx*

Distance sur le terrain		*Échelle de la carte*		*Distance sur la carte*
Capital placé		*Taux de placement*		*Intérêts du capital*
Durée du parcours		*Vitesse moyenne*		*Distance parcourue*
Volume d'un objet		*Masse volumique*		*Masse de l'objet*
Durée de l'écoulement		*Débit moyen*		*Volume écoulé*

Exercice 13

Distance (en km)	*195*	*45*	*700*	*235*
Heure de départ	*8h*	*16h55*	*15h15*	*20h35*
Heure d'arrivée	*9h30*	*19h10*	*16h 25*	*23h 43*
Vitesse moyenne (en km/h)	*130*	*20*	*600*	*75*

Exercice 14

Si y désigne le nombre de nœuds et x le nombre de km/h, alors
$y \approx 0{,}54x$ *(en fait* $y = \frac{1}{1{,}852}x$*) et* $x = 1{,}852y$

Exercice 15

Temps (en s)→ Fleuve↓	*60*	*5*	*900*	*3600*
Garonne	*12 000*	*1 000*	*180 000*	720×10^3
Loire	*48 000*	*4 000*	720×10^3	2880×10^3
Seine	$22{,}5\times 10^3$	$1{,}875\times 10^3$	$337{,}5\times 10^3$	1350×10^3
Rhône	102×10^3	$8{,}5\times 10^3$	1530×10^3	6120×10^3

Débit moyen (m^3/s)	
Rhin	*2210*
Rhône	*1700*
Loire	*800*
Seine	*375*
Garonne	*200*

Exercice 16

Si le côté augmente de 3%, il est multiplié par 1,03.
Le périmètre passe de 4× c à 4× 1,03× c, le périmètre est donc multiplié par 1,03, il augmente de 3%.
L'aire passe de c_ à (1,03× c)_ = 1,0609× c_ ; elle augmente de 6,09%.

Exercice 17

L'application affine vérifiant les conditions :

1. *f est représentée par la droite passant par les points (-2 ; 5) et (3 ; - 1). f(x) = ax + b. On remplace x par - 2 et f(x) par 5 : -2a + b = 5, d'où* $\mathbf{b = 5 + 2a}$*. On remplace x par 3 et f(x) par - 1 : 3a + b = - 1, d'où* $\mathbf{b = -1 - 3a}$*. a est donc la solution de :*

   $5 + 2a = -1 - 3a$ *, donc* $\mathbf{a = -\frac{6}{5}}$*. On remplace a par cette valeur dans b = 5 + 2a pour obtenir* $\mathbf{b = \frac{13}{5}}$*. Donc* $\mathbf{f(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5}}$ *.*
2. *g est telle g(0) = 4 et g(-3) = 6. g(0) = 4, donc g(x) = ax + 4. Et lorsque x = - 3, g(x) = 6. Donc - 3a + 4 = 6 , d'où* $a = -\frac{2}{3}$*. Donc* $\mathbf{g(x) = -\frac{2}{3}x + 4}$
3. *h ,représentée par (D) de pente* $-\frac{2}{3}$ *, donc* $h(x) = -\frac{2}{3}x + b$*. (D) passe par le point (1 ; 3) donc* $h(1) = -\frac{2}{3} + b = 3$*, d'où* $b = \frac{11}{3}$*. Donc* $\mathbf{h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}}$
4. *l est telle que l(5) - l(1) = 3 donc la pente est égale à* $\frac{3}{4}$ *et* $l(x) = \frac{3}{4}x + b$*. Si l(0) = 1, alors b = 1. Donc* $\mathbf{l(x) = \frac{3}{4}x + 1}$*.*

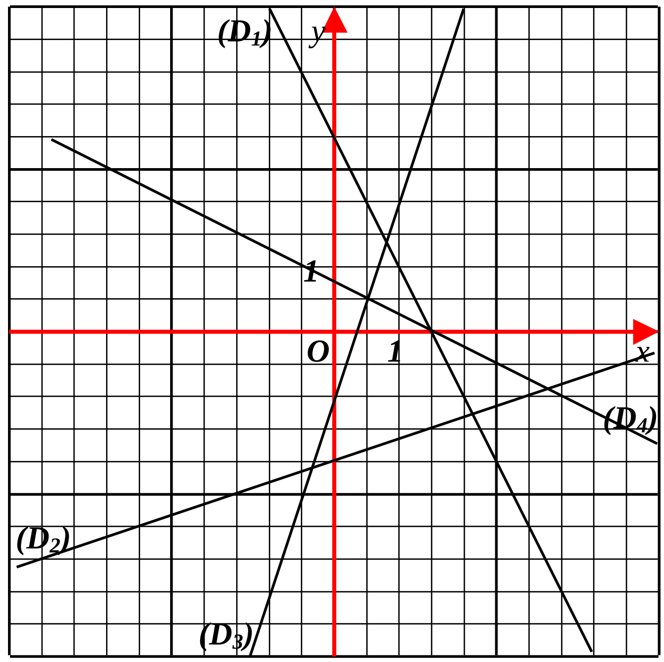
Exercice 18

(D_1) $y = -2x + 3$

(D_2) $y = \frac{1}{3}.x - 2$

(D_3) $y = 3x - 1$

(D_4) $y = -\frac{1}{2}.x + \frac{2}{3}$



Exercice 19