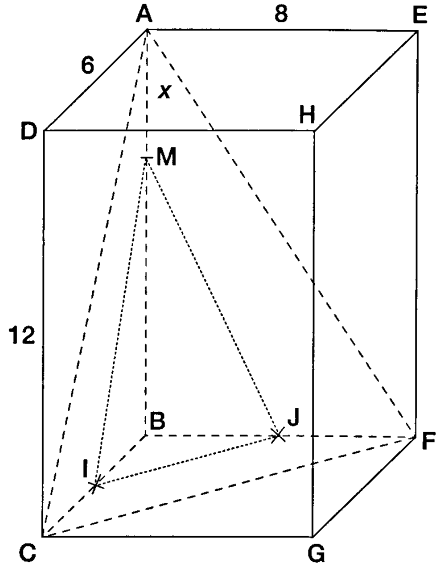
PROBLEME <u>(Afrique1 95)</u> (12 points)

Dans tout ce problème, l'unité de longueur est le centimètre.

La figure ci-dessous (qu'on ne demande pas de reproduire) représente un pavé droit ABCDEFGH.



Le milieu de l'arête [BC] est I et le milieu de l'arête [BF] est J. On note M un point quelconque sur l'arête [AB].

On connaît :

DC = 12 ;

AD = 6 ;

AE = 8.

1) a) Démontrer que l'aire du triangle rectangle ABC est 36 cm^2.

b) Démontrer que le volume de la pyramide ABCF est 96 cm^2.

2) Le point M peut prendre n'importe quelle position sur le segment [AB]. On note x la longueur AM.

a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?

b) Exprimer, en fonction de x, la longueur BM.

3) a) On note A(x) l'aire, exprimée en cm^2, du triangle BIM.

Démontrer que $A(x) = -\frac{3}{2}x + 18$.

b) On veut représenter graphiquement les variations de l'aire A(x) lorsque la longueur AM varie entre 0 et 12.

Dessiner, sur papier millimétré, deux axes perpendiculaires. Sur l'axe des abscisses 1 cm représente 1 cm, et sur l'axe des ordonnées 1 cm représente 1 cm^2.

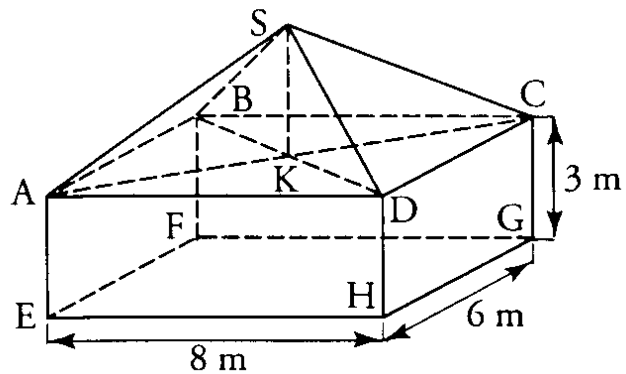
Représenter graphiquement la fonction affine qui, à tout nombre x compris entre 0 et 12 fait correspondre $-\frac{3}{2}x + 18$.

4) a) Trouver graphiquement la longueur AM telle que l'aire A(x) du triangle BIM soit égale à 4,5 cm^2. Faire apparaître sur le graphique la méthode utilisée.

b) Trouver, à l'aide d'une équation, la longueur AM telle que l'aire du triangle ABC soit égale à 4 fois celle du triangle BIM.

PROBLEME (<u>Rennes 96)</u> (12 points)

Un horticulteur envisage la construction d'une serre entièrement vitrée ayant la forme d'un parallélépipède rectangle surmonté d'une pyramide comme l'indique la figure ci-après.



On désigne par x la hauteur SK (exprimée en mètres) de la pyramide SABCD.

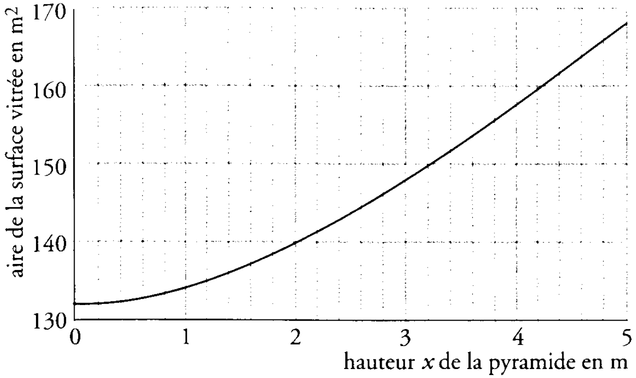
1) Montrer que le volume (en m^3) de la serre est donné par la formule $V = 144 + 16x$.

2) Calculer ce volume pour $x = 1{,}5$.

3) Pour quelle valeur de x le volume de la serre est-il de 200 m^3 ?

On s’intéresse maintenant à la surface vitrée de la serre (surface constituée des quatre faces latérales et du toit).

Répondre aux questions 4) et 5) en utilisant le graphique ci-après qui donne l'aire de cette surface vitrée en fonction de x.



4)Quelle est l'aire de la surface vitrée pour $x = 4{,}20$ puis pour $x = 0$?

5) Pour des raisons de coût, l'horticulteur souhaite limiter la surface vitrée à 150 m^2. Quelle est dans ce cas la hauteur de la pyramide ?

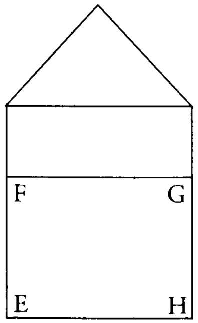
6) En remarquant la forme particulière de la serre dans le cas où $x = 0$, calculer l'aire de la surface vitrée et retrouver ainsi le résultat donné par le graphique.

On prend désormais SK = 3 m (c'est-à-dire $x = 3$).

Afin de mieux se rendre compte de l'allure de sa serre, l'horticulteur décide d'en fabriquer une maquette en carton à l'échelle 1/200.

7) Calculer AC puis SC (distances réelles dans la serre).

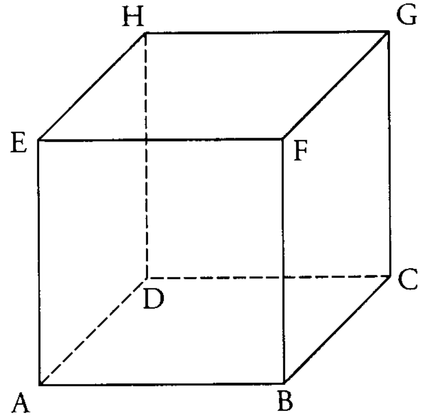
8) En remarquant l'égalité des longueurs des arêtes [SA], [SB], [SC], [SD], compléter le patron de la maquette ci-après.



9) Combien de fois le volume de la maquette est-il contenu dans le volume réel de la serre ?

PROBLEME (<u>Dijon 96)</u> (12 points)

On considère le cube ABCDEFGH dont les arêtes mesurent 6 cm. Sur l'arête [DH] on considère un point S tel que DS = x.



1) Calculer le volume du cube en cm^3.

2) Entre quelles limites peut-on faire varier x ?

3) On considère les deux pyramides :

P_1 de sommet S et de base ABCD ;

P_2 de sommet S et de base EFGH.

a) Montrer que le volume en cm^3 de P_1 s'écrit : $V_1(x) = 12x$ et que le volume en cm^3 de P_2 s'écrit : $V_2(x) = 72 - 12x$.

b) Représenter graphiquement les deux fonctions V_1 et V_2 dans un repère orthogonal pour x compris entre 0 et 6 (on prendra 1 cm pour unité graphique en abscisse et 1 cm pour 5 cm^3 en ordonnée).

c) Calculer le volume restant dans le cube lorsqu'on a enlevé les deux pyramides.

Quelle remarque peut-on faire ?

4) Déterminer graphiquement le volume de la pyramide SEFGH lorsque la pyramide SABCD a un volume de 50 cm^3 (on pourra d'abord déterminer la valeur de x correspondant à $V_1(x) = 50$).

5) a) Calculer la valeur de x pour que $V_1(x) = \frac{1}{2}V_2(x)$ et déterminer alors ces deux volumes.

b) Vérifier ce résultat sur le graphique.

PROBLEME (<u>Grenoble 96)</u> (12 points)

La figure 1 est le schéma d'un réservoir à eau. Il est composé d'une pyramide régulière à base carrée IJKL, de sommet S, surmontée d'un pavé droit.

[SA] est la hauteur de la pyramide, [SB] est la hauteur du réservoir et [SH] la hauteur de l'eau.

Le réservoir se vide par une vanne située en S.

Les mesures sont exprimées en mètres et les volumes en mètres cubes.

On donne : SA = 5, IJ = 6, SB = 13.

La courbe ci-après représente le volume de l'eau en fonction de sa hauteur SH. On ne demande pas de figure.

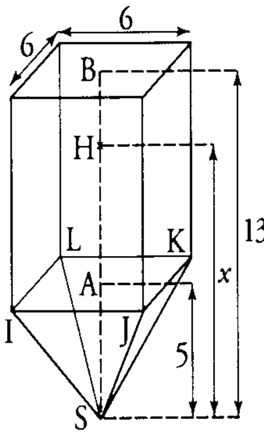


Figure 1

1) a) Montrer que le volume total du réservoir est 348 m^3.

b) Lorsque le réservoir est plein, il faut 10 heures pour le vider (on suppose la vitesse constante).

Quelle est en m^3/h la vitesse d'écoulement de l'eau ?

En déduire qu'elle est égale à 580 l/min.

2) On pose : SH = x . Soit V(x) le volume d'eau correspondant.

Lire sur le graphique, en faisant apparaître les tracés :

- les volumes suivants : V(5), V(10), V(2,5) ;
- la hauteur de l'eau quand V = 247,5 m^3.

3) Dans cette question, la hauteur de l'eau est 2,5 m.

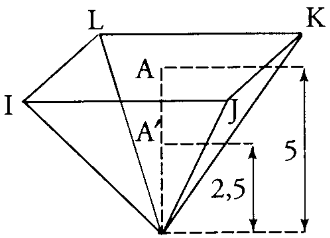
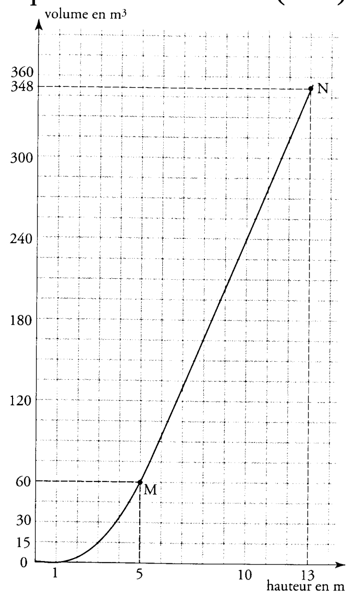


Figure 2

- Retrouver par le calcul le volume d'eau correspondant.
- Calculer le temps nécessaire pour vider le réservoir (arrondir à la minute).

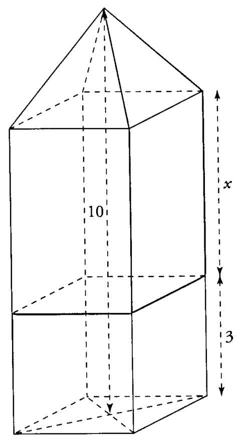
4) Lorsque x est supérieur à 5, la courbe représentant le volume en fonction de la hauteur x est le segment [MN]. Déterminer une équation de la droite (MN). Justifier la réponse.



PROBLEME <u>Amérique 97</u> (12 points)

Première partie

Le solide ci-contre est formé d'un cube d'arête 3 cm surmonté d'un parallélépipède rectangle et d'une pyramide.



Soit x la hauteur du parallélépipède rectangle.

1) Calculer le volume V_1 du cube.

2) Exprimer, en fonction de x, le volume V_2 du parallélépipède rectangle.
3) La hauteur totale de ce solide est égale à 10 cm.
   a) Calculer la hauteur de la pyramide en fonction de x.
   b) Calculer le volume V_3 de la pyramide en fonction de x

Deuxième partie
Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
On utilisera une feuille de papier millimétré en plaçant l'origine O en bas à gauche.
On prendra :
- 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour 3 unités sur l'axe des ordonnées.

1) Tracer les droites :
- (D_1) d'équation $y = 27$;
- (D_2) d'équation $y = 9x$;
- (D_3) d'équation $y = 21 - 3x$.

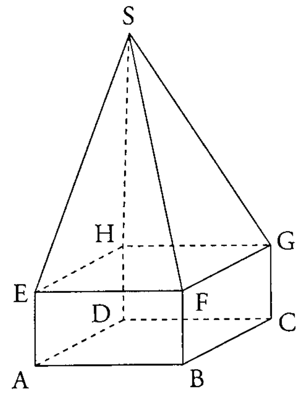
2) a) Calculer les coordonnées du point I d'intersection des droites (D_1) et (D_2).
   b) Pour le solide initial, quelle signification peut-on donner aux coordonnées du point I ?
3) a) Trouver, graphiquement, la valeur de x pour que : $V_1 = V_2$.
(On mettra en évidence les pointillés nécessaires sut le graphique.)
   b) Peut-on avoir : $V_1 = V_2 = V_3$? justifier.)
4) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $V_2 < V_3 < V_1$? (On utilisera le graphique.)

PROBLEME (<u>Rouen 98</u>) (12 points)

Les trois parties sont indépendantes.
Dans tout le problème, les unités employées sont le cm, le cm^2 et le cm^3.

Première partie
On considère le solide représenté ci-contre :
.ABCDEFGH est un pavé droit de base carrée ABCD avec AB = 1,5 cm et de hauteur AE = x cm.
. SEFGH est une pyramide régulière de hauteur 4 cm.

On appelle V_1 le volume du solide représenté ci-contre.



1. Démontrer que $V_1 = 2{,}25x + 3$.
2. Le volume V_1 est-il proportionnel à la hauteur x ? Justifier.

Deuxième partie
On considère des cylindres dont la base est un disque d'aire 3 cm^2 et dont la hauteur, variable, est notée x. On appelle V_2 le volume d'un tel cylindre.
1. Exprimer le volume V_2 en fonction de x.
2. Le volume V_2 est-il proportionnel à la hauteur x ? Justifier.

Troisième partie (graphique)
1. Dans un repère orthogonal (O, I, J), avec OI = 2 cm et OJ = 1 cm, construire les représentations graphiques des fonctions V_1 et V_2 :
$V_1 = 2{,}25x + 3$ $\quad V_2 = 3x$

Pour les questions Suivantes, on ne demande aucun calcul; les réponses doivent être lues graphiquement. Vous devez laisser apparents les pointillés nécessaires à la lecture et donner la réponse sur la copie.
2. Déterminer pour quelle valeur de x on a $V_1 = 7{,}5$.
3. Pour quelle valeur de x les deux solides ont-ils le même volume? Quel est ce volume ?
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on V_1 supérieur ou égal à V_2?

Formulaire

Solide	Volume
Prisme droit	aire de la base $\times$ hauteur
Cône	(aire de la base $\times$ hauteur) : 3
Cylindre	aire de la base $\times$ hauteur
Pyramide	(aire de la base $\times$ hauteur) : 3

PROBLEME <u>(Orléans 99)</u> (12 points)

Un artisan dispose d'un bloc de pierre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont l'une des faces est un carré. Il désire façonner ce bloc de pierre afin de réaliser un trophée, constitué d'une pyramide régulière à base carrée posée sur un socle.
Les figures ci-après représentent le bloc de pierre avant façonnage (figure 1) puis le trophée après mise en place du socle (figure 2).

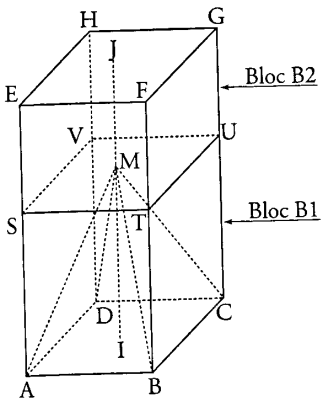


Figure 1

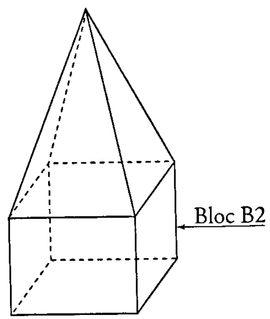


Figure 2

Description de là figure 1
ABCDHEFG représente le parallélépipède rectangle de base carrée ABCD. Il est scié dans le plan STUV parallèle à la base ABCD, ce qui dégage deux blocs :
. le bloc B1 qui est un parallélépipède rectangle ABCDVSTU à base carrée qui servira à tailler la pyramide régulière ABCDM,
. le bloc B2 qui est un parallélépipède rectangle STUVHEFG qui servira de socle à la pyramide comme représenté par la figure 2.
Les points I et J sont les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH.
on admettra que (IJ) est parallèle à (AE), que IJ = AE et que le centre M du carré STUV est un point du segment [IJ].
L'unité de longueur choisie est le cm et l'unité de volume est le cm^3.
On donne AB = BC = 6; AE = 12,
On pose MJ = x.

Première partie
1. On suppose que x = 1.
Calculer pour cette valeur de x :
a) le volume de la pyramide ABCDM,
b) le volume du socle correspondant.
2. On suppose que x = 5.
Calculer pour cette valeur de x :
a) le volume de la pyramide ABCDM,
b) le volume du socle correspondant.

Deuxième partie
Dans toute la suite, on considère que, pour des raisons esthétiques, x doit être compris entre 1 et 5.
Le but des questions qui suivent est de déterminer par deux méthodes s'il existe une valeur de x pour laquelle la pyramide et le socle correspondant ont même volume.

Première méthode :

1. Calculer MI en fonction de x.
2. Montrer que le volume V de la pyramide ABCDM s'exprime en fonction de x par la formule :
V = 144 - 12x
3. Montrer que le volume V' du bloc B2 s'exprime en fonction de x par la formule :
V' = 36x

4. Déterminer la valeur de x pour laquelle V = V'.

Deuxième méthode :
Le plan est muni d'un repère orthogonal. Pour le représenter sur une feuille de papier millimétré, on placera l'origine en bas à gauche de la feuille.

On prendra comme unités graphiques :
. sur l'axe des abscisses : 2 cm pour 1 unité,
. sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 10 unités.

l. Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y = - 12x + 144$, ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = 36x$.

2. Par lecture graphique, et en faisant apparaître les constructions nécessaires sur le graphique, indiquer la valeur de x pour laquelle la pyramide et son socle ont même volume. Conclure par une phrase.