3° (Activité) : Méthodes de détermination du Plus Grand Diviseur Commun

A. Un problème concret.
On veut découper, sans faire de chute, un panneau de bois rectangulaire de dimensions 210 cm × 90 cm, en panneaux carrés identiques dont le côté c soit un nombre entier de centimètres.

1/ Montrer que 6 cm est une valeur possible pour c. Combien de carrés obtient-on ?	
2/ En ne considérant que la largeur 90 cm, établir la liste de toutes les possibilités pour c (c'est-à-dire déterminer tous les diviseurs entiers de 90).	
3/ En ne considérant que la longueur 210 cm, établir la liste de toutes les possibilités pour c (c'est-à-dire déterminer tous les diviseurs entiers de 210).	
4/ En déduire la liste des valeurs passibles de c (c'est-à-dire déterminer tous les diviseurs communs aux entiers 90 et 210).	
5/ Quelle valeur doit-on retenir si l'on souhaite de plus que c soit la plus grande valeur possible (c'est-à-dire déterminer le plus grand diviseur commun des deux nombres 90 et 210).	

B. Une première méthode pour déterminer le Plus Grand Diviseur Commun à deux entiers (PGCD) consiste à établir la liste de tous les diviseurs de chacun des deux nombres et d'en déduire, **parmi les diviseurs communs, le plus grand.**

Par exemple :
Les diviseurs de 210 sont : …………………………..…………………………….
Les diviseurs de 90 sont : …………………………..…………………………….
Les diviseurs communs de 210 et 90 sont : …………………………..…………………………….
Donc, le Plus Grand Diviseur Commun à 210 et 90 est : PGCD (210 ; 90) = ……… .

C. Une deuxième méthode est celle dite « des soustractions successives ».

On utilise la propriété suivante : si un nombre divise deus nombres a et b, alors il divise leur différence.

Pour déterminer le PGCD de deux nombres, on peut les remplacer successivement par le plus petit des deux et par leur différence. La dernière différence non nulle est le PGCD.

Par exemple :
PGCD (210 ; 90)
= PGCD (… ; …) car 210 – 90 = …
= PGCD (… ; …) car … – … = …
= PGCD (… ; …) car … – … = …
= PGCD (… ; …) car … – … = …
= car – =

D. Une troisième méthode est celle dite « de l'algorithme d'Euclide » (divisions successives).

On utilise la propriété suivante : si un nombre divise deus nombres a et b, alors il divise le reste de la division euclidienne du plus grand par le plus petit.

Pour déterminer le PGCD de deux nombres, on peut les remplacer successivement par le plus petit des deux et par le reste de la division euclidienne du plus grand par le plus petit. Le dernier reste non nul est le PGCD.

Par exemple :
PGCD (210 ; 90)
= PGCD (… ; …) car 210 = 90 × … + …
= … car … = … × … + …