CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Nombres entiers et rationnels		Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.
Diviseur commun à deux entiers	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier des écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-même multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entier, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut être mise à profit pour bien distinguer le calcul exacte et le calcul approché
Fractions irréductibles	Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	

I. RAPPELS : LES ENSEMBLES DE NOMBRES :

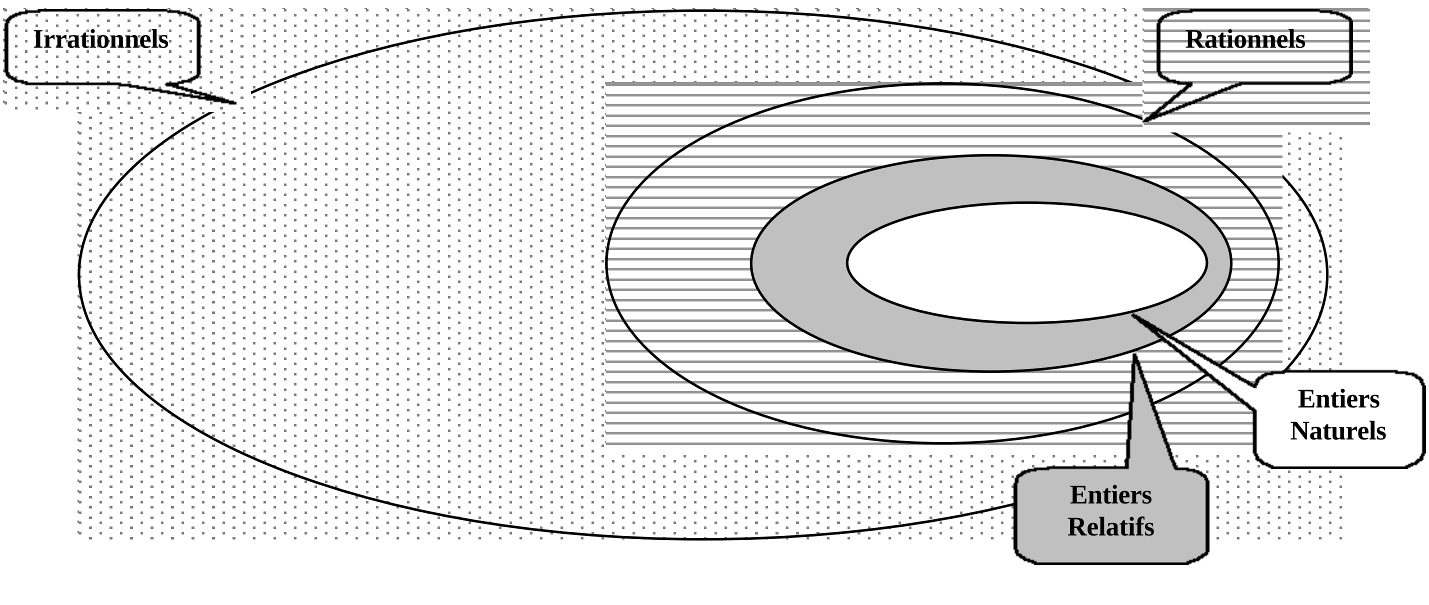
1) **Les entiers naturels** : Ce sont les nombres que l'on peut compter sur ses doigts.
   ex : 0 ; 1 ; 2 ...

2) **Les entiers relatifs** : Ce sont les entiers naturels et leurs opposés.
   ex : ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ...

3) **Les nombres rationnels** : Ce sont les résultats des divisions de 2 nombres entiers relatifs.
   Si la division tombe juste, on les appelle aussi « **décimaux** ».
   ex : $\frac{5}{10} = 0,5$
   Certains rationnels sont négatifs.
   ex :$-\frac{2}{3} = -0,66666....$

4) **Les nombres irrationnels** :
   ex : π ou $\sqrt{2}$

On peut représenter ces ensembles de nombres par le schéma suivant :



II. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX NOMBRES.:

➔ **a et k étant deux entiers naturels tels que k ≠ 0. Lorsque $\frac{a}{k}$ est un entier naturel, on dit que k est un <u>diviseur</u> de a. (c'est à dire quand le reste de la division euclidienne de b par a est zéro)**
(On dit aussi que a est un **multiple** de k, ou encore que a est **divisible** par k)

Exemples :

18	2
0	9

2 est un diviseur de 18. On peut aussi écrire $\frac{18}{2} = 9$
9 est un autre diviseur de 18.

26	4
2	6

4 n'est pas un diviseur de 26.
Le reste de la division de 26 par 4 n'est pas nul.

➔ **Si deux entiers naturels a et b sont divisibles par un même entier naturel k, on dit que k est un <u>diviseur commun</u> de a et b.**

Exemple :
36=12+3 et 24=12×2, donc 12 est un diviseur de 36 et 24.
36=8×4,5 et 24=8×3, donc 8 n'est pas un diviseur commune de 36 et 24 car il ne divise pas 36.

Remarque : 1 est un diviseur commun à tous les nombres.

➔ **si a et b désignent deux nombres entiers relatifs, on note PGCD(a ; b) le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b.**

Exemple :
- la liste des diviseurs de 24 est : **1** ; **2** ; **3** ; **4** ; **6** ; 8 ; $\boxed{\mathbf{12}}$; 24
- la liste des diviseurs de 36 est : **1** ; **2** ; **3** ; **4** ; **6** ; 9 ; $\boxed{\mathbf{12}}$; 18 ; 36.

24 et 36 ont 6 diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Le plus grand d'entre eux est 12, c'est le plus grand diviseur commun de 24 et 36.
On note **PGCD(24 ; 36) = PGCD(36 ;24) = 12**.

III. ALGORITHMES DE RECHERCHE DU PGCD :

a. algotrithme des différences :
pour déterminer PGCD(295 ; 177), on effectue les soustractions successives :

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 9 & 5 \\ - & 1 & 7 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 1 & 1 & 7 \\ - & 1 & 1 & 8 \\ \hline & & 5 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 1 & 1 & 8 \\ - & & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \hline & & \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{array}$$

- On prend les deux nombres et on les soustrait.
- On prend les deux plus petits et on recommence.
- On s'arrête lorsque l'on obtient deux nombres égaux.

Propriété :
Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul dans la succession des différences de l'algorithme.

b. l'algorithme d'Euclide.

Pour déterminer PGCD(252 ; 360) :

- Effectuer la division euclidienne du plus grand des deux nombres par le plus petit :

$$\begin{array}{r|l} 360 & \mathbf{252} \\ \cline{2-2} -252 & 1 \\ \cline{1-1} \mathbf{108} & \end{array}$$

- Effectuer la division euclidienne du diviseur par le reste de la division précédente, jusqu'à ce que le reste de la division soit égal à 0.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{252} & \mathbf{108} \\ \cline{2-2} -216 & 2 \\ \cline{1-1} \mathbf{36} & \end{array}$$

PGCD(360 ; 252)

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{108} & \mathbf{36} \\ \cline{2-2} -108 & 3 \\ \cline{1-1} \mathbf{0} & \end{array}$$

Propriété :

Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide.

On peut aussi schématiser l'algorithme ainsi :

$360 = \mathbf{252}\times1 + \mathbf{108}$

$\mathbf{252} = \mathbf{108}\times2 + \mathbf{36}$ PGCD(360 ; 252)

$\mathbf{108} = \mathbf{36}\times3$

IV. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX. FRACTIONS IRREDUCTIBLES :

a. nombres premiers entre eux :

➔ On dit que deux nombres a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemples :

1) 10 et 7 sont premiers entre eux ; en effet :
les diviseurs positifs de 10 sont 1, 2, 5 et 10,
les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7,
donc PGCD(10 ; 7) = 1 et 10 et 7 sont premiers entre eux.

2) 221 et 69 sont premiers entre eux ; en effet :
en appliquant l'algorithme d'Euclide,
$221 = 69\times3 + 14$
$69 = 14\times4 + 13$
$14 = 13\times1 + 1$
$13 = 1\times13$ donc PGCD(221 ; 13) = 1.

b. fraction irréductible :

➔ On dit qu'une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemples : PGCD(10 ; 7) = 1 donc $\frac{10}{7}$ est une fraction est irréductible.

Propriété :

Lorsque l'on simplifie une fraction par le plus grand diviseur commun à son numérateur et son dénominateur, la fraction obtenue est irréductible.

Exemples :

On sait que PGCD(252 ; 360) = 36 donc : $\frac{360}{252} = \frac{360:36}{252:36} = \frac{10}{7}$ est une fraction est irréductible.