

1 Diviseurs et PGCD

1.1 Diviseurs d'un entier

Définition : soit a et b deux nombres entiers, b est un diviseur de a si le nombre $\frac{a}{b}$ est un entier.

$$\frac{a}{b} = n \text{ où } n \text{ est un entier}$$

a est alors dit multiple de b.

$$a = b \times n \text{ où } n \text{ est un entier}$$

Exemple :

12 est un diviseur de 36 car $\frac{36}{12} = 3$ et 3 est un entier.

36 est un multiple de 12 car $36 = 12 \times 3$

12 n'est pas le seul diviseur de 36, il y a aussi 1, 2, 3, 4, 6, 9, 18 et 36.

Division euclidienne :

Soit a et b deux entiers, le quotient q de la division euclidienne de a par b et le reste r de cette division sont les entiers vérifiant : $a = b \times q + r$ avec $r < b$

on a $r = a - b \times q$. Si $r = 0$ b est un diviseur de a.

Exemple :

$38 = 4 \times 9 + 2$ donc 9 est le quotient de la division euclidienne de 38 par 9 et 2 en est le reste.

1.2 Diviseurs communs à deux entiers et PGCD

Définition : Soit a et b deux entiers, on dit que c est un diviseur commun à a et b si c'est un diviseur à la fois de a et de b.

$a = c \times n$ et $b = c \times m$ où n et m sont des entiers.

Exemple :

36 et 90 ont pour diviseurs communs : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Définition :

Soit a et b deux entiers. On appelle **plus grand commun diviseur** (PGCD) de a et b le plus grand de leurs diviseurs communs

Exemple :

18 est le PGCD de 36 et 90.

$$\frac{36}{18} = 2 \text{ et } \frac{90}{18} = 5 .$$

Notons alors que 2 et 5 n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.

15-3 Algorithmes de recherche de PGCD

Propriété :

Soit c un diviseur commun de a et b alors c est aussi un diviseur de $a + b$ et de $a - b$

$$a = c \times n \text{ et } b = c \times m \text{ alors } a + b = c \times (n + m) \text{ et } a - b = c \times (n - m)$$

Exemple :

9 est un diviseur commun de 36 et 90 donc aussi de 126 (leur somme) et de 54 (leur différence).

Propriété :

Soit c un diviseur commun à a et b alors c est aussi un diviseur du reste de la division euclidienne de a par b .

$$a = c \times n \text{ et } b = c \times m \text{ et } a = b \times q + r \text{ alors } r = a - bq = c \times (n - mq)$$

Exemple :

9 est un diviseur commun de 846 et de 108.

$846 = 108 \times 7 + 90$ et 9 est bien un diviseur du reste 90.

Algorithme 1

Pour trouver le PGCD de a et b on les remplace par le plus petit d'entre eux et par leur différence. On continue ainsi jusqu'à ce qu'un des deux nombres soit nul. L'autre nombre est alors le PGCD.

Exemple :

846	738	630	522	414	306	198	108	90	72	54	36	18	18
108	108	108	108	108	108	108	90	18	18	18	18	18	0

18 est le PGCD de 846 et 108.

Algorithme d'Euclide

Pour trouver le PGCD de a et b on les remplace par le plus petit et par le reste de la division euclidienne. On continue ainsi jusqu'à ce qu'un des deux nombres soit nul. L'autre nombre est alors le PGCD.

Exemple :

846	108	90	18
108	90	18	0

18 est le PGCD de 846 et 108.