

Leçon 2 : Nombres entiers et rationnels

Compétences exigibles :

- Déterminer si deux entiers données sont premiers entre eux
- Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
- Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

Plan de la leçon

- A- PGCD
 - 1- Diviseurs d'un nombre entier
 - 2- PGCD et algorithmes de recherche
 - 3- Nombres entiers premiers entre eux
- B- Fraction irréductible
 - 1- Définition
 - 2- Simplification de fraction

Activités liées à la leçon :

- 1- Synthèse sur les nombres
 - a) Activité 2 page 9
 - b) Irrationalité de $\sqrt{2}$
 - c) Devoir à la maison : fraction continu
- 2-Algorithmes
 - d) Activité 4 page 11
 - e) utilisation du tableur pour trouver le PGCD de deux nombres entiers

A. PGCD

1. Diviseurs d'un nombre entier

Les nombres a et k sont deux entiers naturels tels que $k \neq 0$

Lorsque $\frac{a}{k}$ est un entier naturel, k est un diviseur de a .

On dit aussi que a est un multiple de k ou encore que a est divisible par k critères de divisibilité

Exemples

Les diviseurs de 36 sont : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36 }

Les diviseurs de 24 sont : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24 }

2. PGCD et algorithmes de recherche

a) Diviseurs communs à deux entiers naturels :

Si deux entiers naturels a et b sont divisibles par un même entier naturel k , on dit que k est un diviseur commun de a et b

Les diviseurs communs à 24 et 36 sont : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 }

b) Définition : PGCD

Le plus grand diviseur commun à 24 et 36 c'est 12 c'est le PGCD de 24 et 36

Le plus grand diviseur commun à deux nombres s'appelle le PGCD
On le note $\text{PGCD}(a ; b)$

c) Propriété des diviseurs communs

Si k est un diviseur commun de a et de b alors k est un diviseur commun de $a-b$ et de $a+b$.

Exemple 6 diviseur commun de 24 et 36 donc 6 est aussi un diviseur de $36-24=12$ et de $36+24=60$.

d) Conséquence

Pour $a > b$ $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a-b ; b)$

(1) algorithme de recherche du PGCD par soustractions successives

$\text{PGCD}(95 ; 57) = \text{PGCD}(38 ; 57)$ car $95-57=38$

$\text{PGCD}(38 ; 57) = \text{PGCD}(38 ; 19)$ car $57-38=19$

$\text{PGCD}(38 ; 19) = \text{PGCD}(19 ; 19) = 19$ car $38-19=19$

(2) algorithme de recherche du PGCD par divisions successives
(**algorithme d'Euclide**)

Calcul de $\text{PGCD}(924 ; 630)$

$924 : 630 = 1$ reste 294

$630 : 294 = 2$ reste 42

$294 : 42 = 7$ reste 0 donc $\text{PGCD}(924 ; 630) = 42$

3. Nombres entiers premiers entre eux

Si deux entiers naturels ont pour seul diviseur commun 1, on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Le PGCD de deux nombres premiers entre eux est donc 1.

B. Fraction irréductible

1. Définition

Une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. C'est à dire si le PGCD du numérateur et du dénominateur est 1.

2. Simplification de fraction

Pour simplifier une fraction $\frac{a}{b}$ il suffit de diviser numérateur et dénominateur par $PGCD(a ; b)$.

$$\text{Exemples : } \frac{24}{36} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{2}{3} \text{ car } PGCD(24 ; 36) = 12$$

$$\frac{630}{924} = \frac{15 \times 42}{22 \times 42} = \frac{15}{22} \text{ car } PGCD(630 ; 924) = 42$$