NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

Introduction : on sait simplifier des fractions "simples" grâce aux critères de divisibilité vus en $6^{ème}$; mais pour simplifier par exemple $\frac{33456}{1288}$, cela s'avère insuffisant !

I / PGCD de deux nombres entiers

1°) Diviseur : soit a et b deux entiers naturels (par exemple a < b)
On dit que a est un diviseur de b si b est un multiple de a.

Exemples : 3 est un diviseur de 12 car 12 = 3 _ 4 ; 7 est un diviseur de 63 car 63 = 7 _ 9 ….

Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

2°) Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD)

exemple : PGCD de 12 et 18 :

- les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18

leur plus grand diviseur commun est 6 ; on écrit alors : PGCD(12 ; 18) = 6.

Ici, l'exercice s'avère aisé car il est rapide de lister tous les diviseurs de 12 et 18 ; mais si les entiers donnés sont plus grands ?!
La méthode ayant ses limites, un autre procédé s'impose.

II / L' algorithme d'Euclide (IIIème siècle av.JC)

Rappel : division euclidienne de deux entiers naturels a et b : a = bq + r (q = quotient, r = reste (strictement inférieur au diviseur)
dividende = diviseur _ quotien + reste

exemples oraux

1°) Propriété (admise)

Soit r le reste de la division euclidienne de a par b (a > b)
Alors : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)

preuve : *soit d = PGCD(a ; b) ; a = bq + r*

d | a et d | b _ d | bq d'où d | a – bq = r. Donc d | r

d | r et d | b _ d | PGCD(b ; r) ; soit d' = PGCD (b ; r)

d' | b et d' | r _ d' | bq donc d' | bq + r = a Donc d' | PGCD(a ; b) = d

d | d' et d | d' _ dans IN d = d'

PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) cqfd

2°) Activité de la feuille

cf polycop

3°) Propriété

Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.
Si celui-ci est égal à 1, la fraction n'est pas simplifiable.

III / Les nombres premiers

- On dit que deux nombres entiers a et b sont premiers entre eux si PGCD(a ; b) = 1.
  exemples : 15 et 29 ; 101 et 32 ; ……

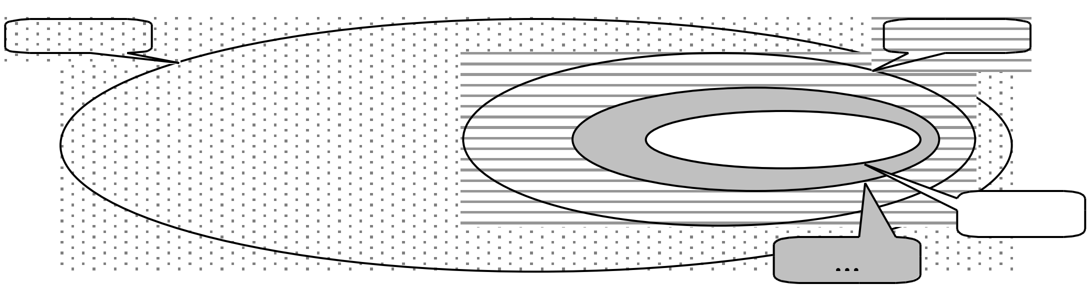
- Un nombre est premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

  exemples :19 ; 47 ; 113 ; ….(il y en a une infinité (admis)).

exercice (à la maison) : trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100.

IV / Les ensembles de nombres (introduction .au programme de seconde)

- l'ensemble des entiers naturels (0 ; 1 ; 2 ; 5 ; ….) : il se note ℕ ;
- l'ensemble des entiers relatifs (-3 ; -15 ; 0 ; 2 ; ……) ; il se note ℤ ;
- l'ensemble des nombres décimaux (2,4 ; 0,0256 ; -6,1 ; ….) ; il se note ID ;
- l'ensemble des nombres rationnels ($\frac{1}{2}$; $\frac{-5}{12}$; 2 ; …) ; il se note ℚ ;
- l'ensemble des nombres irrationnels(non rationnels) : _ ; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{6}}{4}$; $\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; ….et enfin
- IR l'ensemble des nombres réels (qui contient tous les précédents)



V / Utilisation de la calculatrice

exemple : simplifier la fraction $\frac{324}{112}$:

on tape : 324 [a+ b/c] 112 exe (ou =) : on obtient : " 2 ¬ 25 ¬ 28 "