

ARITHMETIQUE

I Textes officiels concernant cette partie.

Le programme a pour objectif de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et une mise en valeur de processus algorithmiques.

<u>Intitulé :</u>	Diviseurs communs à 2 entiers - Fractions irréductibles.
<u>Compétences exigibles</u>	Déterminer si 2 entiers donnés sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible
<u>Commentaires :</u>	Depuis la classe de 5 ^{ème} , les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de 2 multiples de cet entier sont elles-mêmes un multiple de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de 2 nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$ On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

II Jetons d'abord un œil du côté de la littérature

Le quart d'heure de bon temps

*L'homme, dont la vie entière
Est de quatre-vingt seize ans,
Dort le tiers de sa carrière
C'est juste ans.*

*Ajoutons pour maladies
Procès, voyages, accidents
Au moins un quart de vie,
C'est encore deux fois ans.*

*Par jour deux heures d'études
Ou de travaux - font huit ans,
Noirs chagrins, inquiétudes -
Pour le double font ans.*

*Pour affaire qu'on projette
Demi-heure, -encore ans
Cinq quarts d'heure de toilette :
Barbe et cetera - ans*

*Par jour, pour manger et boire
Deux heures font bien ans.
Cela porte la mémoire
Jusqu'à quatre-vingt quinze ans.*

*Reste encore un an pour faire
Ce qu'oiseaux font au printemps
Par jour l'homme a donc sur terre
d'heure de bon temps.*

Nicolas Boileau (1636 - 1711)

Quels sont les nombres effacés dans ce poème de Nicolas Boileau ? (à proposer aux élèves si le temps le permet)

COURS

1) Un peu de vocabulaire

Bilan : Si la division du nombre entier m par le nombre entier n a un quotient entier et un reste nul, alors :

m est un multiple de n
 n est un diviseur de m
 m est divisible par n

2) Critères de divisibilité

Les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10 pourront être révisés oralement. Critère de divisibilité par 4 (facultatif)

Nombre a	N : nombre déterminé par les chiffres des dizaines et des unités de a.	$\frac{a}{4}$	$\frac{N}{4}$
1824	N = 24	456	6
2035			
784			
216			
7078			

Un nombre est divisible par 4 si le nombre déterminé par les chiffres des dizaines et des unités est lui-même divisible par 4

Si la classe est intéressée, on peut aussi étudier le critère de divisibilité par 11.

3) Liste des diviseurs d'un entier

4) Diviseurs communs à 2 entiers -Entiers premiers entre eux

Compléter le tableau en entourant les **diviseurs communs** aux deux nombres a et b

a	b	Les diviseurs communs de a et b sont :
48	26	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 13 ; 17 ; 23
165	110	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 55
16	45	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 9 ; 11 ; 13 ; 17 ; 25
60	105	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 15
180	100	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 9 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25
111	2048	1 ; 2 ; 3 ; 9 ; 15 ; 17 ; 37

28	95	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 19
195	255	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 11 ; 13 ; 17 ; 25
500	200	1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 13 ; 20 ; 25 ; 50 ; 100
57	133	1 ; 2 ; 3 ; 7 ; 15 ; 19 ; 25

Que remarque -t-on pour les nombres 16 et 45, 11 et 2048, 28 et 95 .

On dit que ces nombres sont **premiers entre eux**

Deux nombres sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1

Quand les 2 nombres ne sont pas premiers entre eux, ils ont un ou plusieurs diviseurs communs, et parmi eux on s'intéressera au plus grand appelé **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur)

5) Calcul du PGCD de 2 nombres par soustractions successives

Après un petit travail sur des exemples on peut écrire ce résumé dans le cahier :

Choisir un nombre $q = \dots$

Choisir 2 multiples a et b de q $a = q \square$ $b = q \times \dots$

Calculer $a + b = \dots$ $= q \times \dots$

$a - b = .$ $\dots = .q \times \dots$

Conclusion : Si a et b ($a > b$) sont des multiples de q , alors $a + b$ et $a - b$ le sont aussi
Ou

Si q est un diviseur commun aux entiers a et b ($a > b$), alors q est aussi un diviseur de $a + b$ et de $a - b$.

Grâce à cette propriété il est possible de calculer le PGCD de 2 entiers par soustractions successives (activité 7 page 23).

6) Algorithme d'Euclide

7) Fractions irréductibles

A connaître et à savoir appliquer :

Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont des nombres premiers entre eux.

En simplifiant la fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD($a ; b$), on obtient une fraction irréductible.

8) Compléments facultatifs

Nombres premiers avec crible d'Eratosthène.

Décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers.

Simplification d'une fraction à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.