Académies et années	Simplification de fractions	Application à un calcul sur les fractions	Nombres premiers entre eux	Application à un problème concret	
				« Lots »	« Découpages »
Bordeaux 00	x				
Nancy 00	x				
Orléans 00	x	x			
Paris 00				x	
Bordeaux 01				x	
Afrique 01	x				
Espagne 01	x				
Inde 01				x	
Est 00	x	x	x		
Ouest 00	x				
Vanuatu 00	x				
Caen 00					x
Sup99	x				
Grenoble02	x		x		
Nancy02					x
Nice02	x				
Paris02				x	
La réunion02	x				

Exercice : Bordeaux 00 tableau thématique

Écrire sous forme de fraction irréductible le nombre $\frac{325}{1\,053}$

Indication : on pourra calculer le PGCD des nombres 1 053 et 325.

Corrigé :

1/ L'algorithme d'Euclide donne :

$$1\,053 = 325\times3 + 78$$
$$325 = 78\times4 + 13$$
$$78 = 6\times13 + 0$$

Donc pgcd (1 053 ; 325) = 13.

Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 13 : $\frac{325}{1\,053} = \frac{325 \div 13}{1\,053 \div 13} = \frac{25}{81}$

Exercice : Nancy 00 tableau thématique

Ecrire sous forme irréductible la fraction $\frac{630}{924}$ en donnant le détail de tous les calculs.

Corrigé :

Toute méthode correctement détaillée doit être prise en compte. Avec l'algorithme d'Euclide :			1
a	b	Reste de la division de a par b	
924	630	294	
630	294	42	
294	42	0	
On obtient : $\frac{630}{924} = \frac{42\times15}{42\times22} = \frac{15}{22}$, cette dernière fraction est irréductible et est la fraction cherchée			1

Exercice : Orléans 00 tableau thématique

On pose $M = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}$.

a) Calculer le plus grand diviseur commun D aux deux nombres 20 755 et 9 488. (On reportera avec soin sur la copie les calculs qui conduisent à D).
b) Ecrire en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.
c) Le nombre M est-il décimal ? Est-il rationnel ? Justifier.

Corrigé :

a) On utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer le plus grand diviseur commun aux deux nombres 20 755 et 9 488.

$20\,755 = 9\,488 \times 2 + 1779$ et $1\,779 < 9\,488$

$9\,488 = 1\,779 \times 5 + 593$ et $593 < 1\,779$

$1\,779 = 593 \times 3 + 0$ donc le dernier reste non nul est 593. $\boxed{D = 593}$

b) A l'aide de la question précédente on peut simplifier la fraction $\frac{20\,755}{9\,488}$ par 593. On obtient $\frac{35}{16}$.

$$M = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8} = \frac{35}{16} - \frac{3}{8} = \frac{35}{16} - \frac{6}{16} = \boxed{\frac{29}{16}}$$

c) M est un $\boxed{\text{nombre décimal}}$ car le quotient de 29 par 16 est exact. **Erreur !**.

M est donc un $\boxed{\text{rationnel particulier}}$.

Exercice : Paris 00 tableaux thématiques

Un philatéliste possède 1 631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est à dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers

1. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.
2. Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lot ?

Corrigé :

1/ Un nombre de lots est un diviseur commun au deux nombres 1631 et 932, on cherche donc le pgcd de ces deux nombres pour obtenir le nombre maximum de lots. Pour cela on utilise par exemple l'algorithme d'Euclide :

$1\,631 = 932 \times 1 + 699$

$932 = 699 \times 1 + 233$

$699 = 233 \times 3 + 0$ donc pgcd (1 631 ; 932) = 233 (c'est le dernier reste non nul).

Le nombre maximum de lots pouvant être réalisé est 233.

2/ Il y aura $1\,631 \div 233 = 7$ timbres français par lot et $932 \div 233 = 4$ timbres étrangers par lots.

Exercice : Bordeaux 01 tableau thématique

1/ Déterminer le PGCD des nombres 108 et 135.

2/ Marc à 108 billes rouges et 135 noires. Il veut faire des paquets de sorte que :

- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges ;
- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires ;
- Toutes les billes rouges et toutes les billes noires sont utilisées.

a/ Quel nombre maximal de paquets pourra-il réaliser ?

b/ Combien y aura-t-il de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

Corrigé :

1/ l'algorithme d'Euclide donne : $135 = 108 \times 1 + 27$ $108 = 27 \times 4 + 0$	2/a/ Le nombre de paquets est un diviseur commun au nombre de billes de chaque couleur. Le nombre	b/ $135 \div 27 = 5$. Cinq billes noires. $108 \div 27 = 4$. Quatre billes rouges.

Le dernier reste non nul est le pgcd
donc : pgcd (135 ; 108) = 27.

maximal de paquets est donc 27.

Exercice : Afrique 01 tableau thématique

On considère la fraction $\dfrac{5\ 148}{1\ 386}$

1/ Déterminer, par la méthode de votre choix, le PGCD des nombres 5 148 et 1 386.

2/ Utiliser le résultat de la question précédente pour rendre irréductible la fraction $\dfrac{5\ 148}{1\ 386}$.

Corrigé :

1/ L'algorithme d'Euclide donne :

$$5\ 148 = 1\ 386 \times 3 + 990$$
$$1\ 386 = 990 \times 1 + 396$$
$$990 = 396 \times 2 + 198$$
$$396 = 198 \times 2 + 0$$

Donc pgcd (5148 ; 1 386) = 198.

2/Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 36 : $\dfrac{5\ 148}{1\ 386} = \dfrac{5\ 148 \div 198}{1\ 386 \div 198} = \dfrac{26}{7}$

Exercice : Espagne 01 tableau thématique

1/ Calculer le PGCD des 9 240 et 3 822.

2/ Simplifier la fraction $\dfrac{3\ 822}{9\ 240}$ pour la rendre irréductible : vous noterez sur votre copie le détail des calculs.

Corrigé :

1/ L'algorithme d'Euclide donne :

$$9\ 240 = 3\ 822 \times 2 + 1596$$
$$3\ 822 = 1\ 596 \times 2 + 630$$
$$1\ 596 = 630 \times 2 + 336$$
$$630 = 336 \times 1 + 294$$
$$336 = 294 \times 1 + 42$$
$$294 = 42 \times 7 + 0$$

Donc pgcd (9 240 ; 3 822) = 42.

2/Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 42 : $\dfrac{3\ 822}{9\ 240} = \dfrac{91 \times 42}{220 \times 42} = \dfrac{91}{220}$

Exercice : Inde 01 tableau thématique

1/ Calculer le PGCD de 1 756 et 1 317 (on détaillera les calculs nécessaires).

2/ Un fleuriste a reçu 1 756 roses blanches et 1 317 roses rouges.
Il désire réaliser des bouquets identiques (c'est-à-dire comprenant un même nombre de roses et la même répartition entre les roses blanches et les rouges) en utilisant toutes les fleurs.

a/ Quel sera nombre maximal de bouquets identiques ?
Justifier clairement la réponse.

b/ Quelle sera alors la composition de chaque bouquet ?

Corrigé :

1/ l'algorithme d'Euclide donne :
$1\ 756 = 1\ 317 \times 1 + 439$
$1\ 317 = 439 \times 3 + 0$

2/a/
Le nombre de bouquets est un diviseur commun au nombre de

b/
$1\ 756 \div 439 = 4$.
$1\ 317 \div 439 = 3$.

Le dernier reste non nul est le pgcd donc : pgcd (1 756 ; 1 317) = 439.

fleurs de chaque couleur. Le nombre maximal de bouquets est donc 439.

Chacun des 439 bouquets comporte 4 roses blanches et 3 rouges.

Exercice ______ : Groupe Est 00 (septembre) tableau thématique

1/ Les nombres 756 et 441 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

2/ La fraction $\frac{756}{441}$ est-elle irréductible ? Sinon, l'écrire sous forme irréductible en justifiant, sur la copie, par des calculs.

3/ Calculer la somme D = $\frac{756}{441} + \frac{19}{21}$.

Corrigé :

1/ l'algorithme d'Euclide donne :

756 = 441×1 + 315

441 = 315×1 + 126

315 = 126×2 + 63

126 = 63×2 + 0

Le dernier reste non nul est le pgcd donc : pgcd (756 ; 441) = 63.

Le pgcd des deux nombres n'est pas égal à un donc ils ne sont pas premiers entre eux. .

2/a/

La fraction n'est pas irréductible car son numérateur et son dénominateur ne sont pas premiers entre eux et on la rend irréductible en la simplifiant par 63 :

$\frac{756}{441} = \frac{756 \div 63}{441 \div 63} = \frac{12}{7}$

(Le critère divisibilité par 9 au1/ n'aurait pas donné le pgcd utile ici).

b/

D = $\frac{756}{441} + \frac{19}{21}$

D = $\frac{12}{7} + \frac{19}{21}$

D = $\frac{36}{21} + \frac{19}{21}$

D = $\frac{55}{21}$

Exercice ______ : Groupe Ouest 00 (septembre) tableau thématique

1/ Déterminer le PGCD de 1 512 et 3 150.

2/ Écrire le nombre $\frac{3\,150}{1\,512}$ sous forme de fraction irréductible, en faisant apparaître les étapes de calcul.

Corrigé :

1/ L'algorithme d'Euclide donne :

9 240 = 3 822×2 + 1596

3 822 = 1 596×2 + 630

1 596 = 630×2 + 336

630 = 336×1 + 294

336 = 294×1 + 42

294 = 42×7 + 0

Donc pgcd (9 240 ; 3 822) = 42.

2/Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 42 : $\frac{3\,822}{9\,240} = \frac{91 \times 42}{220 \times 42} = \frac{91}{220}$

Exercice ______ : Vanuatu 00 (septembre) tableau thématique

Rendre irréductible la fraction $\frac{1\,488}{2\,418}$ en détaillant les calculs.

Corrigé :

L'algorithme d'Euclide donne :

2 418 = 1 488×1 + 930

1 488 = 930×1 + 558

930 = 558×1 + 372

558 = 372×1 + 186

$$372 = 186\times 2 + 0$$

Donc pgcd (2 418 ; 1 488) = 186.

Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 42 : $\frac{1488}{2418} = \frac{186\times 8}{186\times 13} = \frac{8}{13}$

Exercice : Caen 00 tableau thématique

a/ Calculer le PGCD de 110 et 88.

b/ Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante : « Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte ».
Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

c/ Combien obtiendra-t-il de carrés par plaques ?

Corrigé :

a/ l'algorithme d'Euclide donne :
$110 = 88\times 1 + 22$
$88 = 22\times 4 + 0$
Le dernier reste non nul est le pgcd donc : pgcd (110 ; 88) = 22.

b/
la longueur du côté d'un carré est le plus grand diviseur commun à la largeur et à la longueur d'une plaque, c'est donc 22 cm.

c/
110 22 = 5 plaques dans la longueur.
$88 \div 22 = 4$ plaques dans la largeur.
Au total $5\times 4 = 20$ carrés par plaques.

Exercice : Texte supplémentaire 99 tableaux thématiques

1/ Rendre les fractions suivantes irréductibles après avoir reconnu des critères de divisibilité : $\frac{180}{210}$; $\frac{240}{105}$.

2/ Rendre les fractions suivantes irréductibles après avoir calculé le PGCD par l'algorithme d'Euclide du numérateur et du dénominateur de chacune d'elles : $\frac{4\,862}{2\,145}$; $\frac{3\,450}{759}$.

Corrigé :

1/ $\frac{180}{210} = \frac{18}{21}$ (par 10)
$= \frac{6}{7}$ (par 3)

$\frac{240}{105} = \frac{48}{21}$ (par 5)
$= \frac{16}{7}$ (par 3)

2/ $4\,862 = 2\,145\times 2 + 572$
$2\,145 = 572\times 3 + 429$
$572 = 429\times 1 + 143$
$429 = 143\times 3 + 0$
Donc pgcd (4 862 ; 572) = 143.
Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 143 : $\frac{4\,862}{2\,145} = \frac{4\,862 \div 143}{2\,145 \div 143} = \frac{34}{15}$

$3\,450 = 759\times 4 + 414$
$759 = 414\times 1 + 345$
$414 = 345\times 1 + 69$
$345 = 69\times 5 + 0$
Donc pgcd (3 450 ; 759) = 69.
Donc la fraction est rendue irréductible en la simplifiant par 69 : $\frac{3\,450}{759} = \frac{3\,450 \div 69}{759 \div 69} = \frac{50}{11}$

Exercice : Grenoble02 tableau thématique

1/ Les nombres 682 et 496 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

2/ Calculer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 682 et 496.

3/ Simplifier la fraction **Erreur !** pour la rendre irréductible, en indiquant la méthode.

Corrigé :

1/ Les nombres 682 et 496 sont divisibles par 2 donc ils ne sont pas premiers entre eux.

2/ On utilise par exemple l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{r|l} 682 & 496 \\ \hline 186 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 496 & 186 \\ \hline 124 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 186 & 124 \\ \hline 62 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 124 & 62 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Donc le PGCD de 682 et 496 est 62.

3/ **Erreur !** = **Erreur !** = **Erreur !**

Exercice : Nancy02 tableau thématique

1/ Calculer le plus grand diviseur commun de 540 et 300.

2/ Une pièce rectangulaire de 5,40 m de long et de 3 m de large est recouverte, sans découpe, par des dalles de moquette carrées toutes identiques.

a/ Quelle est la mesure du côté de chacune de ces dalles, sachant que l'on veut le moins de dalles possibles ?

b/ Calculer alors le nombre de dalles utilisées ?

Corrigé :

1/ L'algorithme d'Euclide donne la liste de divisions euclidiennes successives :

$540 = 1\times300 + 240$

$300 = 1\times240 + 60$

$240 = 4\times60 + 0$

Le dernier reste non nul est le PGCD donc PGCD (540 ; 300) = 60.

2/ a/ La mesure du côté en cm doit diviser simultanément 540 et 300 pour qu'il n'y ait pas de découpe et si l'on veut le moins de dalles possibles, il faut que ce soit le plus grand diviseur commun donc 60 cm d'après 1/.

b/ Il passe 540 : 60 = 9 dalles dans la longueur et 300 : 60 = 5 dalles dans la largeur.

Il faut donc $5\times9 = 45$ dalles pour recouvrir la pièce.

Exercice : Nice02 tableau thématique

On considère la fraction **Erreur !**.

1/ Montrer que cette fraction n'est pas irréductible.

2/ Déterminer le PGCD des nombres 170 et 578 (faire apparaître les différentes étapes).

3/ Écrire la fraction sous forme **Erreur !** irréductible.

Corrigé :

1/ Numérateur et dénominateur ont leur dernier chiffre pair donc la fraction est simplifiable par 2 et par conséquent, elle n'est pas irréductible.

2/ L'algorithme d'Euclide donne la liste de divisions euclidiennes successives :

$578 = 3\times170 + 68$

$170 = 2\times68 + 34$

$68 = 2\times34 + 0$

Le dernier reste non nul est le PGCD donc PGCD (170 ; 578) = 34.

3/ On rend la fraction irréductible en la simplifiant par le PGCD du numérateur et du dénominateur :

Erreur ! = **Erreur !** = **Erreur !**

Exercice : Paris02 tableau thématique

Pour le 1er Mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses.
Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?
Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

Corrigé :

Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

Si n est le nombre de bouquets, comme elle veut utiliser toutes les fleurs et que les bouquets soient de compositions identiques, n doit diviser 182 et 78. Comme de plus elle veut en faire le plus grand nombre possible, n est le PGCD de 182 et 78.
Méthode des divisions euclidiennes successives :
182 = 2 x 78 + 26
78 = 26 x 3 + 0
Le dernier reste non nul est 26, c'est donc le PGCD de 128 et 78.
On en conclut que Julie peut faire 26 bouquets.
182 : 26 = 7 donc chaque bouquet contient 7 brins de muguet
78 : 26 = 3 donc chaque bouquet contient 3 roses.

Exercice : La réunion02 tableau thématique

On considère C = **Erreur !**
Simplifier la fraction C pour la rendre irréductible.

Corrigé :

$C = \frac{357}{595} = \frac{119 \times 3}{119 \times 5} = \frac{3}{5}$ Car le PGCD (357;595)=119 (595 = 1×357 + 238 ; 357 = 1×238 + 119 ; 238 = 2×119)