CONTENUS	COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
4. Nombres entiers et rationnels.		Cette partie d’arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l’histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.
Diviseurs communs à 2 entiers.	Déterminer si 2 entiers donnés sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l’habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de 2 multiples d’un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d’Euclide ou un autre, qui donnant le PGCD de 2 nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l’irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

A. Calcul numérique

En 3 e , les élèves affinent leur maîtrise des fractions et abordent les premiers calculs sur les radicaux. Ce travail peut donner lieu à une synthèse intéressante sur les nombres rencontrés depuis le début de leur scolarité.
Dès la classe de 6 e , les élèves ont été amenés à travailler sur des nombres en écriture fractionnaire et en particulier sur des quotients d’entiers. Ils ont ainsi utilisé des nombres (rationnels) exprimés sous diverses formes: forme fractionnaire (réduite ou non) ou forme décimale (limitée ou non); ils ont pu constater que certains d’entre eux sont des entiers, d’autres des décimaux non entiers et d’autres encore ni des entiers ni des décimaux.
Les changements d’écriture pour la forme fractionnaire ou les passages de la forme fractionnaire à la forme décimale permettent d’assurer un lien avec la division euclidienne et
la division décimale, exacte ou approchée. Les différentes significations de la division (recherche de la valeur d’une part ou du nombre de parts) seront à nouveau mises en évidence en fonction des situations étudiées. À cette occasion, on soulignera les liens entre des écritures comme $17 = 5\times3+2$; $\frac{17}{5} = 3+\frac{2}{5}$; $\frac{17}{3} = 5+\frac{2}{3}$

Les élèves ont déjà eu l’occasion de simplifier des écritures fractionnaires, mais sans disposer de critères pour déterminer si la fraction obtenue est irréductible ou non. Les problèmes proposés à ce sujet en 3 e sont l’occasion d’enrichir les connaissances des élèves en arithmétique. Après avoir travaillé au cycle central sur les notions de multiples et de diviseurs,
il est nécessaire de savoir si deux entiers sont ou non premiers entre eux. Pour l’obtention du PGCD de deux entiers, le programme préconise l’algorithme d’Euclide ou éventuellement un algorithme de différence — la répétition de la

transformation qui à un couple d'entiers (a, b) fait correspondre le couple constitué de leur minimum et de leur écart, par exemple qui à (285, 630) fait correspondre (285, 345) — plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers.
Il n'est pas inutile de rappeler que l'arithmétique avait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la décomposition
en produit de facteurs premiers. Certes les facteurs premiers de petits nombres, 924 ou 1999 pour donner des exemples, s'obtiennent facilement. Mais il n'en est plus du tout de même pour de plus grands nombres, dont l'ordinateur rend aujourd'hui naturelle la considération. C'est ainsi qu'il sera par exemple beaucoup plus facile d'établir directement que les deux nombres 12345678910111213 et 10000000000000007 ne sont pas premiers entre eux
que d'essayer de trouver leur décomposition en facteurs premiers. Certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de messages (cryptage et décryptage), s'appuient largement sur la difficulté pratique d'obtention de certaines décompositions.
Il convient ici de souligner que, dans toutes les activités, la pratique du calcul mental doit être prédominante. Ainsi pour passer de la forme $3+\frac{2}{7}$ à la forme $\frac{22}{7}$, les élèves devraient être capables de fournir la réponse directement, sans passer par la forme $\frac{3}{1}$ pour exprimer le nombre 3 et sans écrire explicitement les deux fractions avec le même dénominateur. De la même façon, la réduction d'une écriture comme $\frac{36}{48}$ doit pouvoir être réalisée rapidement (en une ou étapes) sans recourir à des décompositions explicites de 36 et 48 en facteurs premiers, ni à un algorithme pour calculer le PGCD de deux nombres: l'utilisation consciente de la seule égalité $\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}$(éventuellement plusieurs fois) est suffisante.
La synthèse sur les nombres rencontrés au collège permet par ailleurs de donner un nouvel éclairage sur les nombres rationnels, en mettant en évidence le fait que tous les nombres ne sont pas rationnels. Le nombre π en est bien sûr un exemple, mais ce sont surtout les nombres qui ne peuvent pas être exprimés exactement autrement qu'en utilisant le symbole $\sqrt{\ }$ (lettre r stylisée) qui en sont la meilleure illustration. Il est donc intéressant de faire prendre conscience aux élèves de toute la richesse, tant théorique que pratique, à laquelle peut conduire une réflexion sur un objet tel que $\sqrt{2}$: longueur de la diagonale du carré unité ou côté du carré d'aire double. L'utilisation d'un symbole particulier (presque un nom propre) laisse à penser que les écritures antérieures ne suffisaient pas. Sa découverte constitue un des premiers succès historiques des mathématiques. Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ pourra, dans cette optique, éventuellement être envisagée. Le théorème de Pythagore, vu en classe de 4 e , est pour le concept de racine carrée une bonne opportunité de mettre en œuvre le principe d'appuis mutuels entre différentes parties du programme.

A. Le calcul

Dans les classes antérieures à la 3 e , le calcul numérique était le point de départ pour le calcul littéral, puis devenait en quelque sorte sa matière première. Par exemple, on apprenait à distinguer une identité et une équation grâce à la substitution de valeurs numériques aux lettres représentant des variables. En classe de 3 e , une modification de caractère fondamental s'introduit avec l'imbrication totale du calcul numérique et du calcul littéral. C'est, par exemple, du traitement des variables que l'on s'inspire pour les calculs mettant en jeu des racines carrées. Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche. Pourvu que l'on ait bien choisi l'écriture à utiliser pour les nombres, ce que l'on appelle encore leur format, on peut par exemple obtenir en lecture directe de l'affichage d'une calculatrice une égalité du genre : $\frac{1}{666}-\frac{1}{999}=\frac{1}{1998}$.
L'emploi des logiciels désignés par l'une des appellations calcul symbolique ou calcul formel donne aux opérations que l'on est amené à effectuer un caractère extrêmement concret, ce qui intéresse beaucoup d'élèves, mais aussi très contraignant, ce qui pourrait être décourageant pour un élève trop livré à lui-même. Les exemples fourmillent, à

commencer par tous ceux qu'il convient de mettre en rapport avec les formats possibles des nombres. Que l'on explore
par exemple, si on n'en a pas encore eu l'occasion, les mêmes calculs sur des racines carrées effectués par un logiciel de calcul formel, selon qu'on lui aura demandé du calcul exact ou du calcul approché (on peut pour cela puiser des idées à partir des exemples mêmes du programme, ainsi : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ peut conduire à une variété importante de calculs ayant valeur de tests).
Les ordinateurs conduisent encore à élargir le domaine de l'expérimentation. Nous verrons que c'est bien sûr le cas pour les logiciels de constructions géométriques, mais c'est aussi le cas pour les tableurs, qui permettent à la fois de manipuler des expressions algébriques, de remplacer les variables par des valeurs et d'entreprendre, en conservant les résultats et les formules, un grand nombre de calculs liés à des expressions algébriques. À la demande, ils peuvent ensuite fournir rapidement des représentations graphiques variées. La fréquentation des formules, leur construction, leur utilisation et leur analyse rendent possible une approche
nouvelle de l'apprentissage de l'algèbre. Ils constituent aussi un outil rapide d'exploration des statistiques, permettant l'analyse des données sans que la charge de calcul devienne un obstacle insurmontable. Enfin la mise en œuvre, dans un tableur, d'algorithmes comme celui d'Euclide permet la mise en place d'une réflexion particulière sur les automatismes de calculs qu'une machine peut prendre en charge.