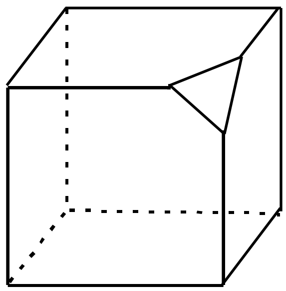
CHAPITRE 3
LES SOLIDES, LA SPHERE

LES SOLIDES

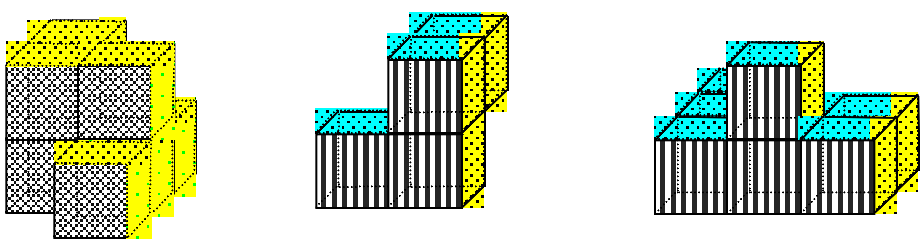
Exercice 1



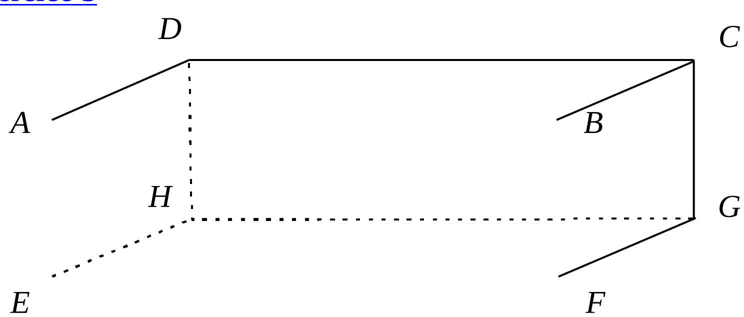
En découpant un coin d'un cube en bois, on a obtenu le solide ci-contre. Maintenant, on découpe de la même façon les sept autres coins du cube.
Quel est le nombre f des faces du solide obtenu, le nombre s de ses sommets, et le nombre a de ses arêtes?

Exercice 2

Dessiner les vues de face, de droite, de gauche et de dessus des solides suivants :



Exercice 3



Recopier et compléter le tableau des mesures ci-dessous; on donnera les valeurs exactes :

EF		*1*	*9*	*3*	*3*
FG	*3*	*2*			
CG	*6*	*2*	*2*		*6*
EG				*12*	*8*
EC	*7*		*13*	*20*	
Aire totale du solide					
Volume du solide					

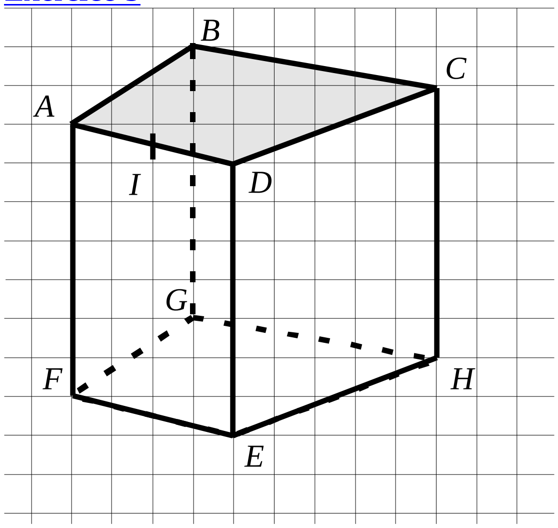
Exercice 4

Exprimer chacun de ces volumes dans l'unité permettant l'écriture la plus courte :

12 500 dam^3 =
200 000 m^3 =
0,003 5 dam^3 =
6 500 000 000 cm^3 =

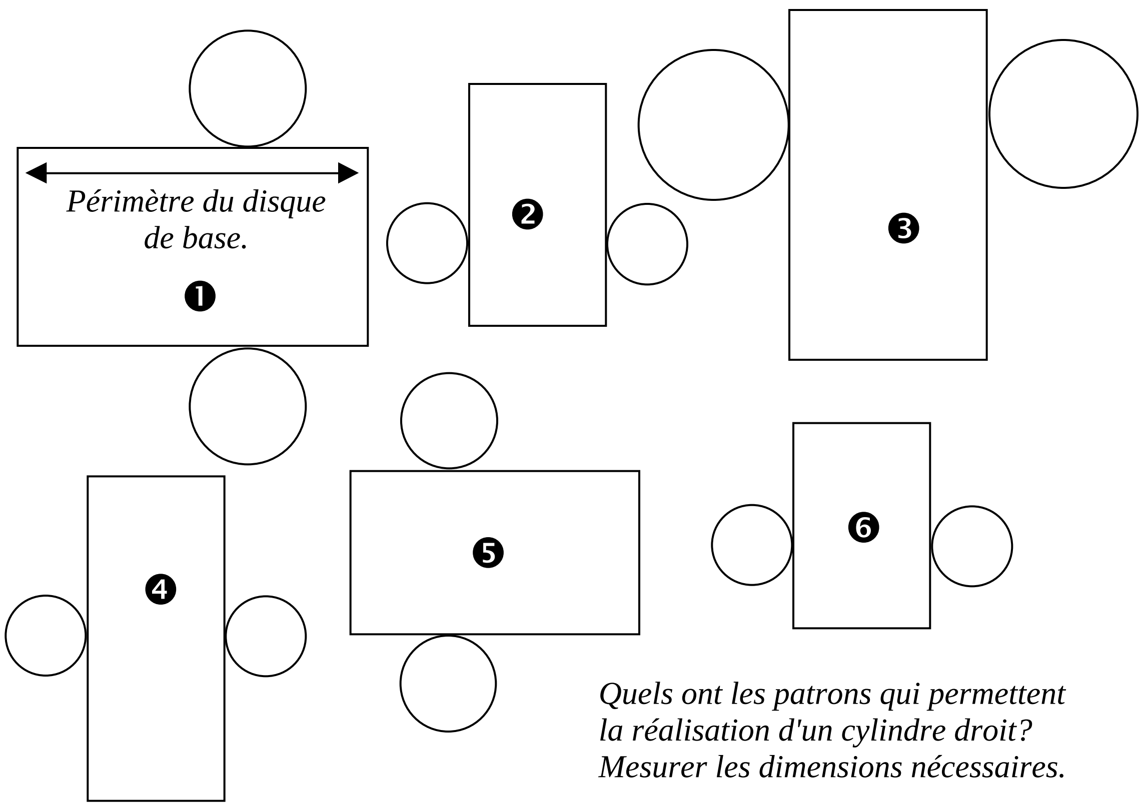
17 000 000 cm^3 =
3 500 hm^3 =
0,000 008 km^3 =
0,000 068 dam^3 =

Exercice 5



Reproduire sur un quadrillage le prisme ci-contre dans lequel I est le milieu de [AD].
Représenter le point J, intersection de l'arête [EF] avec le plan contenant le triangle BGI.
Quelle est la nature du quadrilatère AIJF?
Placer le point K, intersection de l'arête [DC] et du plan parallèle au plan ACF passant par J.
On suppose que FH = 6 cm. Calculer IK.

Exercice 6



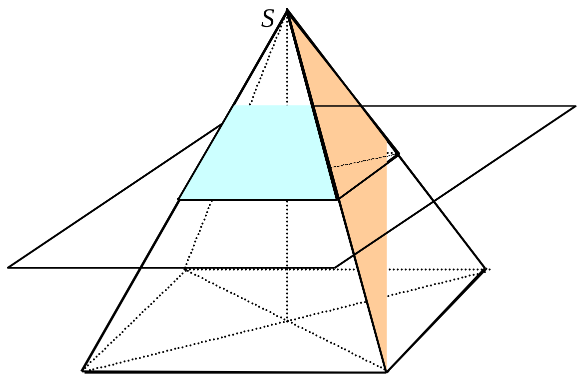
Quels ont les patrons qui permettent la réalisation d'un cylindre droit?
Mesurer les dimensions nécessaires.

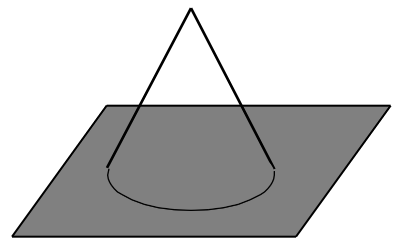
Exercice 7

1. *Un cylindre droit a une aire latérale de 47,1 m_ et une hauteur de 2,4 m. Quel est le rayon d'un disque de base?*
2. *Calculer la hauteur d'un cylindre de volume V et de rayon R dans les cas suivants :*
   - *$V = 220\ cm^3$ et $R = 2,5$ cm*
   - *$V = 12\ dm^3$ et $R = 15$ cm.*
3. *Calculer la hauteur puis le volume d'un cylindre droit dont l'aire latérale est 101 cm_ et le rayon d'un disque de base est 1,6 cm.*

SECTIONS PAR UN PLAN

Section de pyramide et de cône par un plan parallèle à la base :





Lorsque l'on coupe l'un de ces solides par un plan parallèle à la base, on fait apparaître dans la partie supérieure un solide de même nature, et dans la partie inférieure un tronc de pyramide ou un tronc de cône.

Effet de la section sur les dimensions :

Si l'on réalise un dessin de la pyramide selon le plan passant par les points S, O et B, on obtient la situation suivante :

Les droites (OB) et (O'B') étant parallèles, on se trouve dans la situation de Thalès.

Il y a donc le même rapport entre SO' et SO qu'entre O'B' et OB et qu'entre SB et SB'.

Autrement dit, si on sait que le plan coupe la pyramide de sorte que les hauteurs soient dans un rapport k, il y a le même rapport k pour tous les dimensions de la pyramide.

Par exemple, si le plan coupe la pyramide aux $\frac{2}{3}$ *de sa hauteur à partir du sommet, alors* $O'B' = \frac{2}{3} \times OB$ *et* $SB' = \frac{2}{3} \times SB$.

Conséquence sur les aires et les volumes :

Puisque les aires se calculent en multipliant deux dimensions qui ont été multipliées par k, elles seront elles-mêmes multipliées par k_.

Puisque les volumes se calculent en multipliant trois dimensions qui ont été multipliées par k, ils seront, eux, multipliées par k^3 .

LA LEÇON

1. Rappels : formules et unités

a) Le cube, le pavé

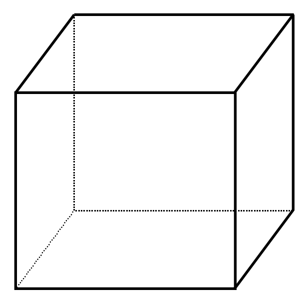
Le pavé a trois dimensions habituellement appelées longueur, largeur et hauteur.

V = abc

Le cube est un cas particulier de pavé pour lequel les trois dimensions sont identiques.

$V = a \times a \times a = a^3$

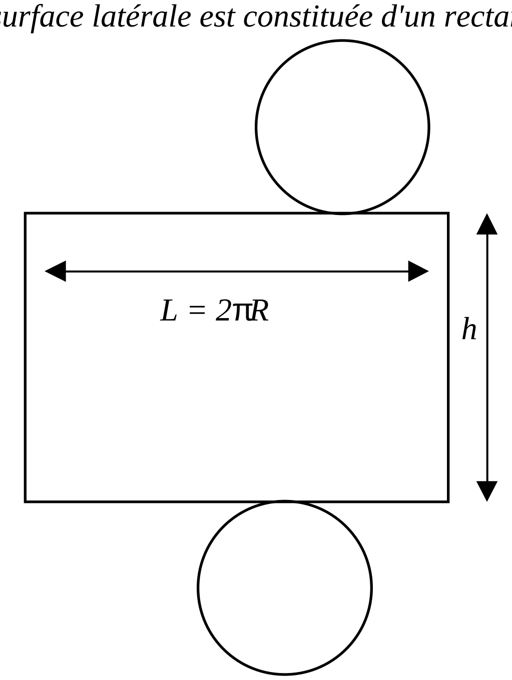
Représentation en perspective cavalière :

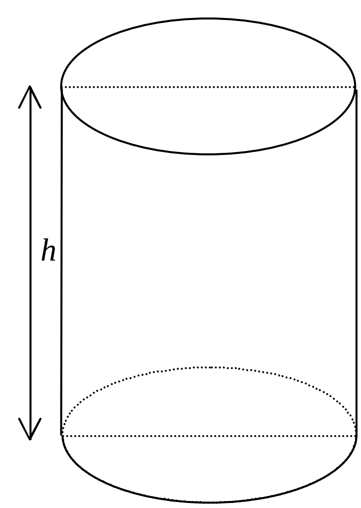


Vocabulaire :
Un cube (comme un pavé) a :
- 8 sommets
- 6 faces
- 12 arêtes
*L'aire totale du cube, c'est l'aire des six faces, soit 6a_*

b) le cylindre de révolution

Un cylindre possède deux bases parallèles qui sont des disques de rayon R.
Sa surface latérale est constituée d'un rectangle replié autour de ces deux disques.

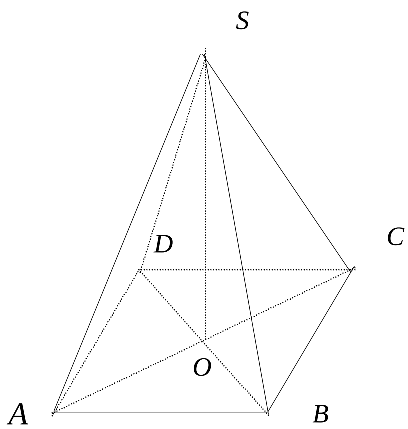


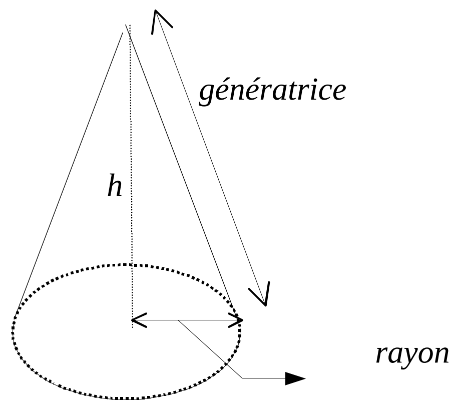


Volume du cylindre :
V = B × h où B est l'aire de la base.

Aire du cylindre A = 2πR_ + 2πRh

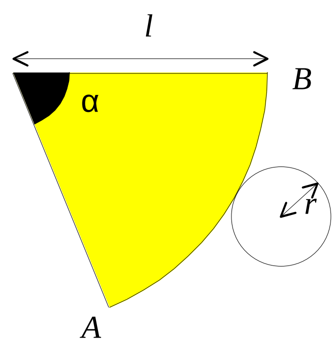
c) Pyramides et cônes





Développement (patron) du cône :

Pour que le patron permette de construire un cône, il faut la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ *soit égale à la longueur du cercle de base.*



Il faut donc que : $\frac{2\pi l}{360} \times \alpha = 2\pi r$

Et après simplification : $r = l \times \frac{\alpha}{360}$.

Ce qui peut aussi s'écrire : $\frac{r}{l} = \frac{\alpha}{360}$

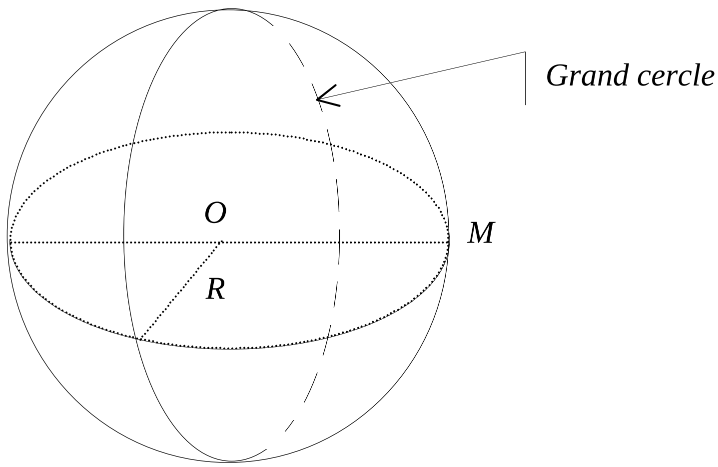
C'est à dire que le rapport du rayon du disque de base à la génératrice est égal au rapport de l'angle au centre à 360°.

d) Agrandissement réduction :

Si les dimensions d'un cône (ou d'une pyramide) sont multipliées par k, alors les aires seront multipliées par k_ et les volumes seront, eux, multipliées par k^3 .

2. Définitions; Représentation de la sphère

Une sphère a un centre O et un rayon R. Un point de la sphère est à la distance R de O.
La boule est l'intérieur de la sphère.
Un ***grand cercle*** *est un cercle de points de la sphère dont le centre est celui de la sphère.*



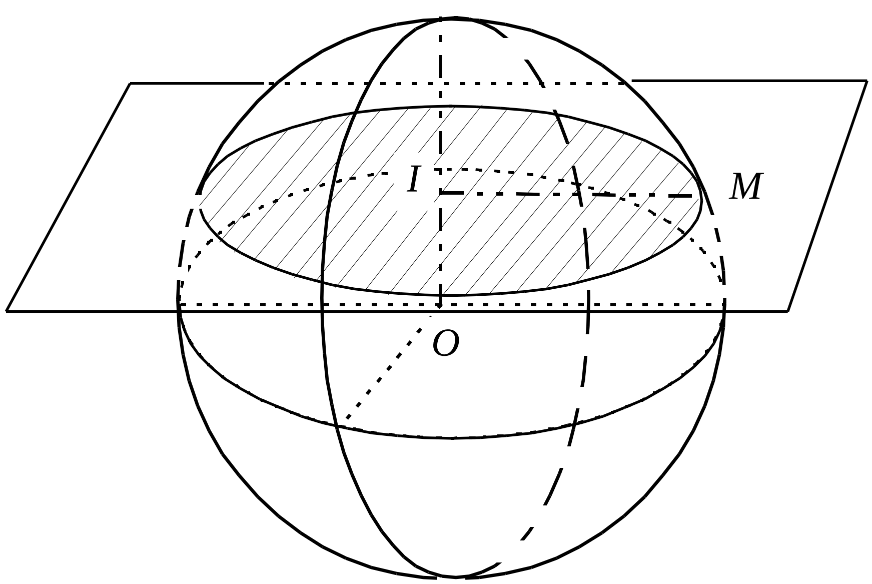
Pour donner l'impression de volume, on trace deux grands cercles à diamètres perpendiculaires, que l'on représente par des ellipses.

3. Formules

L'aire de la sphère se calcule au moyen de la formule :
$A = 4\pi R$_, *où R est le rayon de la sphère.*

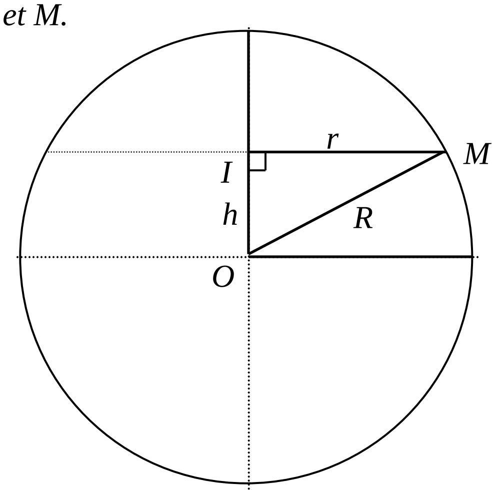
Le volume de la boule se calcule au moyen de la formule :
$V = 4/3.\pi R^3$, *où R est le rayon de la sphère.*

4. Section de la sphère par un plan



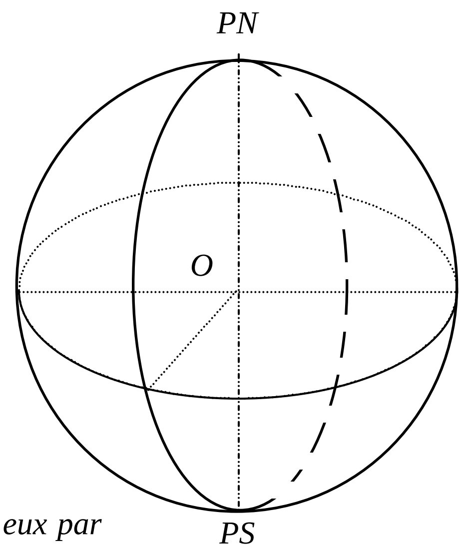
Si on coupe une sphère par un plan, le plan coupe la sphère en deux parties. La partie supérieure s'appelle une calotte sphérique.
Le plan fait apparaître sur la sphère un cercle dont le centre (ici le point I) est un point d'un diamètre de la sphère. Ce cercle est appelé ***petit cercle****.*

Plaçons-nous dans le plan contenant les points O, I et M.



Si on désigne par h la distance entre le point I et le centre O de la sphère, et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OIM, on obtient la relation :
OM est le rayon R de la sphère, donc :
R_ = h_ + r_, d'où ***: r = √R_ - h_***

5. La sphère terrestre.

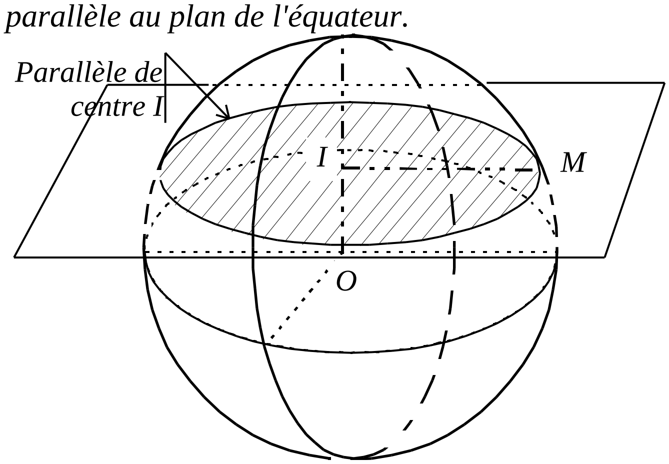


La Terre est une sphère (légèrement aplatie aux pôles) dont le ***rayon est arrondi à 6 400 km.***
Le segment formé par les deux pôles est un diamètre de la Terre.

*L'****équateur*** *est un grand cercle de la Terre; sa longueur se calcule donc par la formule : L = 2πR, où R est le rayon de la Terre. On obtient :*
L ≈ 2 × π × 6 400 ≈ ***40 000 km****.*

Tous les ***méridiens*** *sont d'autres grands cercles, passant eux par les deux pôles, et leur longueur est aussi d'environ 40 000 km.*

Un ***parallèle*** *est un petit disque de la Terre, déterminé par la section de la Terre par un plan parallèle au plan de l'équateur.*

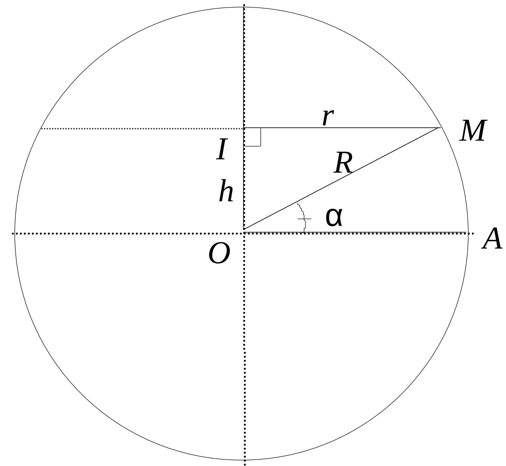


La longueur d'un parallèle dépend de son rayon; ce rayon dépend de la longueur séparant le centre du parallèle du centre de la Terre. Il peut se calculer ainsi qu'il est montré au paragraphe 4.

Mais les parallèles ont été repérés d'une autre manière. C'est l'angle formé par un point de l'équateur, le centre de la Terre et un point du parallèle qui va permettre de déterminer le parallèle. Cet angle porte le nom de ***latitude****.*
Plaçons-nous dans le plan contenant les points O, I et M.

Le point M est un point du parallèle de centre I.
La latitude de ce parallèle est l'angle α, formé par les points A, O et M.

Les droites (IM) et (AO) étant parallèles, les angles $\widehat{IMO}$ et $\widehat{MOA}$ sont alternes - internes, donc égaux.
Donc dans le triangle IMO, on peut utiliser le Cos :
et on obtient : ***r = R × Cos α.***



> ***La latitude d'un parallèle est un angle compris entre 0° et 90°; on ajoute une indication de sens pour dire si le parallèle est entre l'équateur et le pôle Nord, ou bien entre l'équateur et le pôle Sud.***

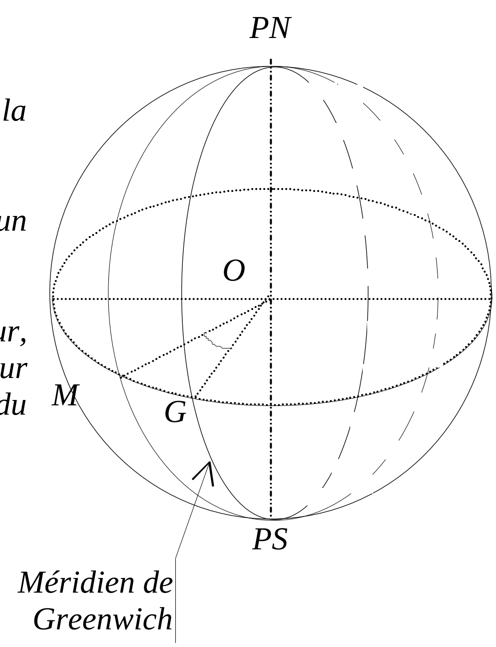
On dira donc d'un point qu'il a une latitude de 42°N ou de 38°S, par exemple.

Coordonnées géographiques :

Pour repérer un point sur la Terre, on le situe à la fois sur un méridien et sur un parallèle.

Chaque méridien est repéré par rapport à un méridien de référence : le méridien de Greenwich

Si M est le point d'un méridien situé sur l'équateur, et G le point du méridien de Greenwich situé sur l'équateur, l'angle GOM est la ***longitude*** *du méridien passant par le point M.*



> ***La longitude d'un méridien est un angle compris entre 0° et 180°; on ajoute une indication de sens pour dire si le méridien est à l'Est ou à l'Ouest du méridien de Greenwich.***

On dira donc d'un point qu'il a une longitude de 42°E ou de 138°O, par exemple.

EXERCICES

Exercice 1

Sachant que l'équateur terrestre mesure environ 40 000 km, calculer le rayon de la Terre.

Exercice 2
Un bateau navigue le long d'un méridien de la latitude 12°S à la latitude 13°N. Quelle est environ la distance parcourue?

Exercice 3
1.Calculer l'aire d'un disque de rayon 28 cm. (On prendra $\pi = 22/7$*)*
2.Calculer le rayon d'un disque dont l'aire vaut 490,625 cm_.(on prendra $\pi = 3{,}14$*).*

Exercice 4
Calculer l'aire d'une sphère et le volume de la boule dont le rayon est 12 km.

Exercice 5
Calculer l'aire totale d'un cylindre dont la hauteur est 10 cm et le rayon de la base est 5 cm.

Exercice 6
Sur un globe terrestre, l'arc de méridien allant du pôle à l'équateur mesure 15,7 cm. Calculer le rayon du globe, puis son volume.

Exercice 7
Une sphère a une aire de 1 256 cm_. Calculer le rayon de cette sphère puis le volume de la boule contenue dans cette sphère.

Exercice 8
Une sphère a un rayon de 1 cm. Quelle est la longueur de l'arête d'un cube ayant la même aire qu'elle?

Exercice 9
Calculer la longueur du 38$^{\text{ème}}$ parallèle. (parallèle de latitude 38°).

Exercice 10
Calculer l'aire et le volume de chacune des planètes suivantes. Donner le résultats en écriture scientifique .

Planète	*Mercure*	*Mars*	*Jupiter*
Rayon (en km)	*2 420*	*3 395*	*71 600*

Exercice 11

Un cube de 60 cm d'arête est inscrit dans une sphère (ses sommets sont 8 points de la sphère).

a) Calculer la longueur exacte d'une diagonale d'une face du cube; on l'appelle d.
b) Faire un dessin (échelle : 1/10) de la coupe de la sphère par un plan passant par deux diagonales parallèles de deux faces parallèles du cube.
c) Calculer le diamètre de la sphère.
d) Calculer l'aire de la sphère.

Exercice 12

L'atmosphère couvre la Terre sur une hauteur moyenne de 400 km.

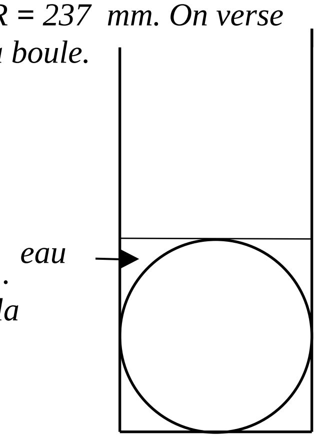
a) Calculer le volume d'air présent autour de la terre . On rappelle que le rayon de la terre est environ 6 400 km.
b) En admettant que la masse moyenne d'un litre d'air est 1 gramme, exprimer en tonnes la masse totale de l'atmosphère.

Exercice 13

Une sphère mesure 30 cm de diamètre. Elle est coupée par un plan à 5 cm de son centre. Calculer l'aire du disque d'intersection entre le plan et la boule.

Exercice 14

Une boule est plongée dans un cylindre qui a le même rayon qu'elle R = 237 mm. On verse de l'eau dans le cylindre jusqu'à ce que le niveau arase exactement la boule.
Il s'agit en répondant aux questions suivantes de calculer la hauteur de l'eau dans le cylindre lorsque l'on retire la boule.



a) Calculer le volume de la boule V_1
b) Calculer le volume V_2 : eau + boule
c) Calculer la hauteur de l'eau dans le cylindre quand il y a la boule .
d) Calculer la hauteur de l'eau dans le cylindre quand on a retiré la boule.

Exercice 15

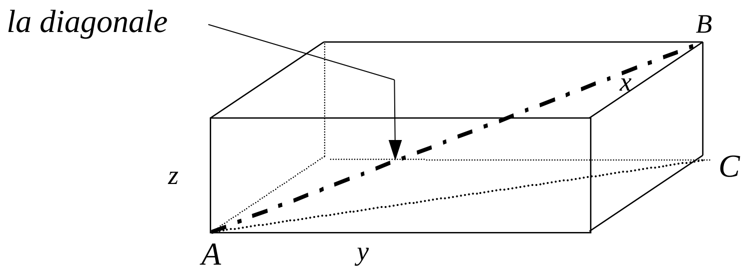
1. Si on connaît le rayon R d'une sphère, on peut calculer par étape :

D = 2R	×π →	*P = 2πR*	× *R/2* →	A_d = πR_	× 4 →	A_S =4πR_	× *R/3* →	*V* =4/3.πR^3
	Périmètre d'un grand cercle.		*Aire d'un grand disque*		*Aire de la sphère*		*Volume de la boule*	

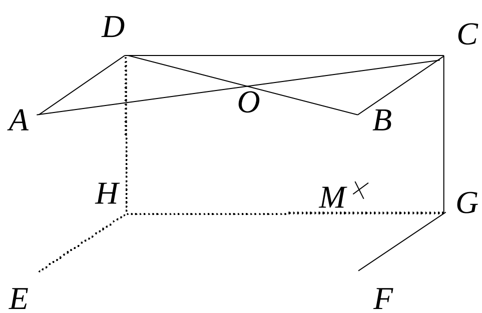
2. Si on connaît le diamètre D
On calcule R; D = 2R donc R = ...
3. Si on connaît le périmètre P d'un grand cercle
On calcule R; P = 2πR donc R = ...
4. Si on connaît l'aire A_d d'un grand disque.
On calcule R; A_d = πR_ donc R = ...
5. On connaît l'aire A_S de la sphère
On calcule R; A_S = 4πR_ donc R = ...

Exercice 16

Exprimer la longueur de la diagonale d'un pavé droit en fonction de ces trois dimensions x, y et z.
Puis calculer la longueur x lorsque AB = 18, y = 5 et z = 7.



Exercice 17

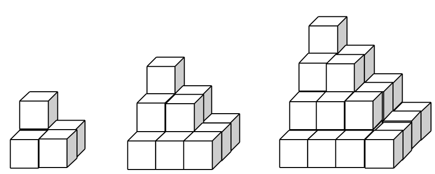


Dessiner le patron de ce pavé.
Calculer le plus court chemin entre M (un point de [BF] et O le centre de la face du dessus selon que l'on peut se déplacer dans l'espace, ou bien que l'on soit contraint de rester sur la surface du pavé, et dans les deux cas suivants :

1. *Lorsque AD = 12 cm, DC = 20 cm et CG = 14 cm et M est au milieu de [BF]*
2. *Lorsque M est en F avec les mêmes dimensions.*

Exercice 18

On fabrique des pyramides en empilant des cubes ainsi que le montre l'illustration ci contre.
Vérifier que le nombre de cubes nécessaires pour chaque pyramide peut se calculer au moyen de la formule suivante dans laquelle n désigne le nombre d'étages :



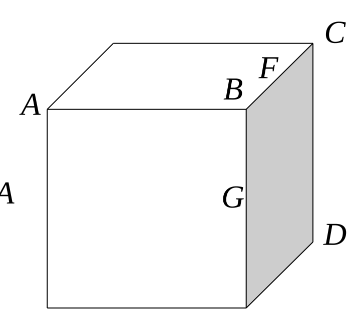
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Quel serait le nombre de cubes d'une pyramide à 6 étages?
Quel pourrait être le nombre d'étages d'une pyramide utilisant 385 cubes?

Exercice 19

Les points F et G sont les milieux des arêtes [BC] et [BE] du cube dessiné. Parmi les cinq "chemins" suivants qui vont de A à D, quel est le plus court?

D-B-A *D-C-A* *D-F-A* *D-E-A* *D-G-B-A*

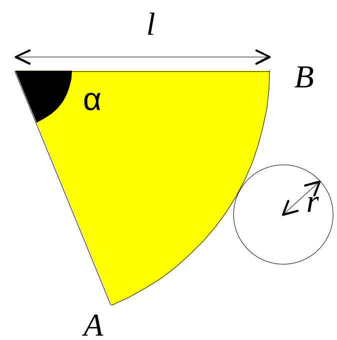


Exercice 20

Un ballon de diamètre 25 cm est posé sur l'eau.

1. *Calculer le rayon du cercle de contact du ballon avec l'eau si le ballon s'enfonce de 3 cm dans l'eau.*
2. *Calculer le rayon du cercle de contact du ballon avec l'eau si le ballon s'enfonce aux trois quarts de sa hauteur dans l'eau.*

Exercice 21



Dans chaque cas, calculer la grandeur manquante parmi l, r et α *, en fonction des deux autres :*

1. *l = 6 cm et* α *= 40°.*
2. *l = 18 et r = 3*
3. α *= 60° et r = 2 cm*
4. *l = 2r*

Exercice 22

O est le centre de la base d'un cône de diamètre [AB] de longueur 4 cm.
S est le sommet de ce cône. Sa hauteur est SO = 6 cm.

1. *Déterminer l'angle au centre du secteur de disque fournissant le développement de la surface latérale de ce cône. Puis dessiner le patron du cône.*
2. *En utilisant ce patron, déterminer et calculer la plus courte distance de A à B, en* ***restant sur la surface latérale*** *du cône.*
3. *I est le milieu de [SB] déterminer et calculer la plus courte distance de A à I, en* ***restant sur la surface latérale*** *du cône.*
4. *P est un point du cercle de base ([SP] est une génératrice). Calculer une valeur approchée de* $\widehat{OSP}$.
5. *Pour quelle position du point M sur [SP] la distance OM est-elle la plus courte ? Calculer alors OM et SM.*

CORRIGES DES EXERCICES

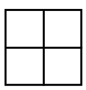
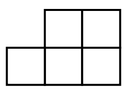
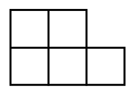
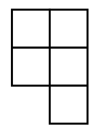
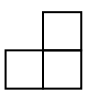
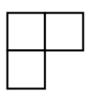
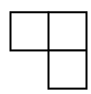
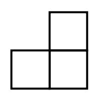
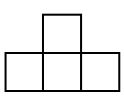
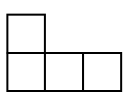
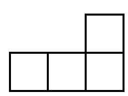
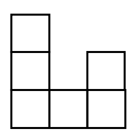
FICHES D'ACTIVITES

Exercice 1

En coupant un coin de cette manière, :

- *On rajoute 1 face par sommet initial. Il y a donc maintenant : 6 + 8 = 14 faces.*
- *On retire un sommet pour en rajouter trois, soit deux en plus pour chaque sommet initial. Il y en a donc maintenant : 8 + 2 × 8 = 24 sommets.*
- *On rajoute trois arêtes pour chaque sommet initial. Il y en a donc maintenant : 12 + 3 × 8 = 36 arêtes.*

Exercice 2

	Vue de face	*Vue de droite*	*Vue de gauche*	*Vue de dessus*
Figure 1				
Figure 2				
Figure 3				

Exercice 3

1er cas :

FG = 3 cm   CG = 6 cm   EC = 7 cm

Dans CEG, rectangle en G : $EG = \sqrt{EC\_-CG\_} = \sqrt{7\_-6\_} = \sqrt{13}$

Dans EGF, rectangle en F : $EF = \sqrt{EG\_-FG\_} = \sqrt{13-3\_} = \sqrt{4} = 2$

Aire totale du solide : on compte deux fois chaque face :

*2 × (CG × FG + EF × CG + FG × EF) = 2 × (6× 3 + 2× 6 + 3× 2)= 72 cm_*

Volume du solide : EF × FG × CG = 2 × 3 × 6 = 36 cm^3

2ème cas :

EF = 1   FG = 2   CG = 2

$EG = \sqrt{EF\_ + FG\_} = \sqrt{1\_+2\_} = \sqrt{5}$
$EC = \sqrt{EG\_ + GC\_} = \sqrt{5+2\_} = \sqrt{9} = 3$
$A = 2 \times (2 + 4 + 2) = 16\ cm\_$ $V = 1 \times 2 \times 2 = 4\ cm^3$

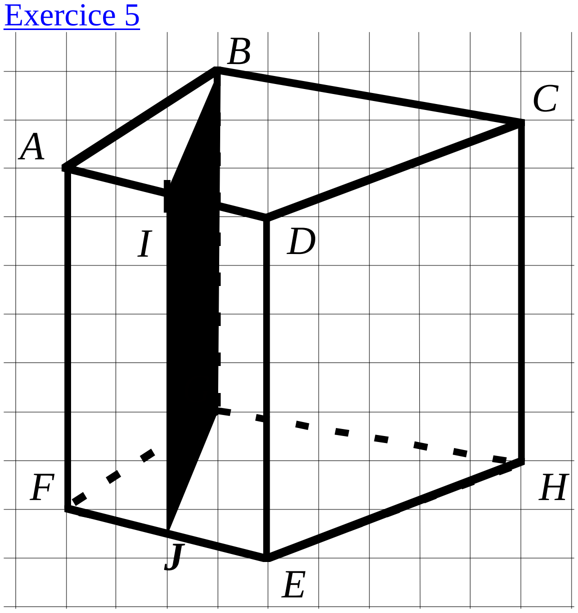
Etc.

EF	***2***	*1*	*9*	*3*	*3*
FG	*3*	*2*	$\sqrt{\mathbf{84}}$	$\sqrt{\mathbf{135}}$	$\sqrt{\mathbf{55}}$
CG	*6*	*2*	*2*	***16***	*6*
EG	$\sqrt{\mathbf{13}}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{\mathbf{165}}$	*12*	*8*
EC	*7*		*13*	*20*	***10***
Aire totale du solide	***72***	***16***			
Volume du solide	***36***	***4***			

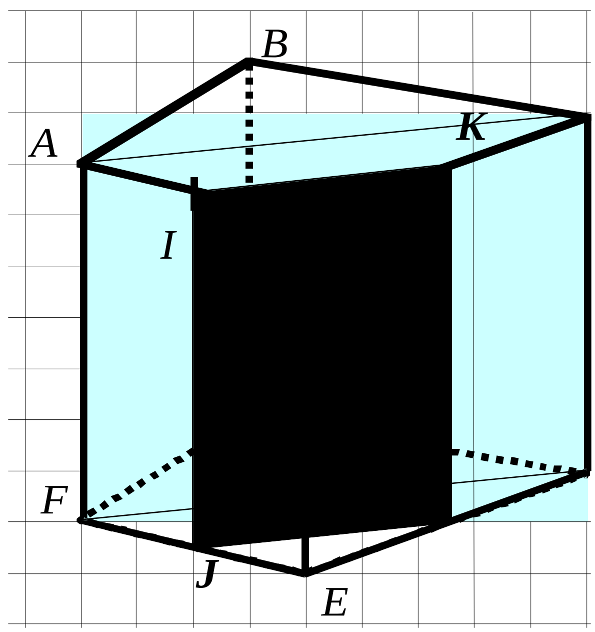
Exercice 4

$12\,500\ dam^3 = \mathbf{12{,}5\ hm^3}$
$200\,000\ m^3 = \mathbf{0{,}2\ hm^3}$
$0{,}003\,5\ dam^3 = \mathbf{3{,}5\ m^3}$
$6\,500\,000\,000\ cm^3 = \mathbf{6{,}5\ dam^3}$
$17\,000\,000\ cm^3 = \mathbf{17\ m^3}$
$3\,500\ hm^3 = \mathbf{3{,}5\ km^3}$
$0{,}000\,008\ km^3 = \mathbf{8\ dam^3}$
$0{,}000\,068\ dam^3 = \mathbf{68\ dm^3}$

Exercice 5



Section du solide par le plan contenant le triangle BGI.
J est le milieu de [EF]



Section du solide par le plan parallèle au plan ACF, passant par J.
K est le milieu de [CD]

Exercice 6

Pour savoir si le patron convient , il faut que la longueur de la surface latérale soit égale au périmètre du disque de base. Donc que cette longueur L soit égale à π × D où D est le diamètre du disque de base.

On mesure longueur et diamètre et on évalue le rapport $\frac{L}{D}$ *qui doit être proche de π (aux approximations de mesure près).*

Cylindre ❶	Cylindre ❷	Cylindre ❸	Cylindre ❹	Cylindre ❺	Cylindre❻
$L = 4{,}6$	$L = 3{,}2$	$L = 4{,}6$	$L = 4{,}3$	$L = 3{,}8$	$L = 2{,}7$
$D = 1{,}5$	$D = 1$	$D = 2$	$D = 1{,}1$	$D = 1{,}2$	$D = 1$
$\frac{L}{D} = 3{,}07$	$\frac{L}{D} = 3{,}2$	$\frac{L}{D} = 2{,}3$	$\frac{L}{D} = 3{,}9$	$\frac{L}{D} = 3{,}17$	$\frac{L}{D} = 2{,}7$
possible	possible	impossible	Impossible	possible	Impossible

Exercice 7

1) *L'aire latérale du cylindre :* $\mathcal{A} = 2\pi Rh$. *Donc* $R = \frac{\mathcal{A}}{2 \times \pi \times h} = \frac{47{,}1}{2 \times 3{,}14 \times 2{,}4} = 3{,}125m$

2) $V = \pi R^2 h$, *donc* $h = \frac{V}{\pi \times R^2}$

- *Si* $V = 220\ cm^3$ *et* $R = 2{,}5\ cm$: $h = \frac{220}{3{,}14 \times 2{,}5^2} \approx 11{,}2\ cm$
- *Si* $V = 12\ dm^3$ *et* $R = 15\ cm = 1{,}5\ dm$: $h = \frac{12}{3{,}14 \times 1{,}5^2} \approx 1{,}7\ dm$.

3) *On sait que* $A = 2\pi Rh$, *donc* $h = \frac{A}{2\pi R}$. *On pourrait calculer ainsi h.*

Mais on peut calculer V sans calculer h :

$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \times \frac{A}{2\pi R} = \frac{AR}{2}$ *(en simplifiant par π et R). D'où :* $V = \frac{101 \times 1{,}6}{2} = 80{,}8\ cm^3$

FICHES D'EXERCICES

Exercice 1

L'équateur est un grand cercle de la sphère terrestre. sa longueur est égale à 2πR, où R est le rayon de la Terre. Donc $R = \frac{L}{2 \times \pi} = \frac{40000}{6{,}28}$ $6400km$

Exercice 2

Un méridien mesure comme l'équateur 40 000 km. Il correspond à un angle de 360°.
Entre les latitudes 12°S et 13°N, il y a un angle de 25°, ce qui correspond à une longueur égale à : $\frac{40000 \times 25}{360}$ $2780km$

Exercice 3

1. $\boldsymbol{A} = \pi R\_ = \dfrac{22}{7} \leftrightarrow 28? = 2464 cm?$

2. $R = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{490{,}625}{3{,}14}} = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5 cm$

Exercice 4

Si R = 12 km, $\boldsymbol{A} = 4\pi R\_ \approx 4 \times 3{,}14 \times 12\_ \approx 1\ 008$ *km_*

$\text{et } V = \dfrac{4}{3} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow R^3 \quad \dfrac{4}{3} \leftrightarrow 3{,}14 \leftrightarrow 12^3 \quad 7235\ km^3$

Exercice 5

L'aire totale d'un cylindre est la somme de l'aire latérale et des deux disques de base :

$\boldsymbol{A} = 2\pi Rh + 2\pi R\_ = 2\pi R(h + R)$

Si h = 10 et R = 5 cm, alors $\boldsymbol{A} \approx 2 \times 3{,}14 \times 5 \times (5 + 10) = 31{,}4 \times 15 = 471$ *cm_.*

Exercice 6

L'arc de méridien du pôle à l'équateur représente le quart du méridien , donc le méridien mesure L =4× 15,7 = 62,8 cm. Et L = 2πR, donc $R = \dfrac{L}{2 \leftrightarrow \pi} \quad \dfrac{62{,}8}{6{,}28} \quad 10\, cm.$

Exercice 7

$\boldsymbol{A} = 4\pi R\_$ *, donc* $R = \sqrt{\dfrac{A}{4 \leftrightarrow \pi}} = \sqrt{\dfrac{1256}{12{,}56}} = \sqrt{100} = 10\, cm.$

Exercice 8

L'aire de la sphère est égale à 4πR_, donc si R = 1 cm, alors l'aire vaut 4π.

L'aire du carré est égale à 6a_. On a donc l'égalité 6a_ = 4π , d'où : $a = \sqrt{\dfrac{4 \leftrightarrow \pi}{6}} \quad 1{,}4$ *cm.*

Exercice 9

Soit r le rayon du $38^{ème}$ *parallèle. La longueur L de ce parallèle est égale à 2πr.*

$r = R_T \times \text{Cos } 38$ *, donc* $L = 2\pi \times R_T \times \text{Cos } 38$ *(où* R_T *est le rayon de la Terre ≈ 6 400 km)*

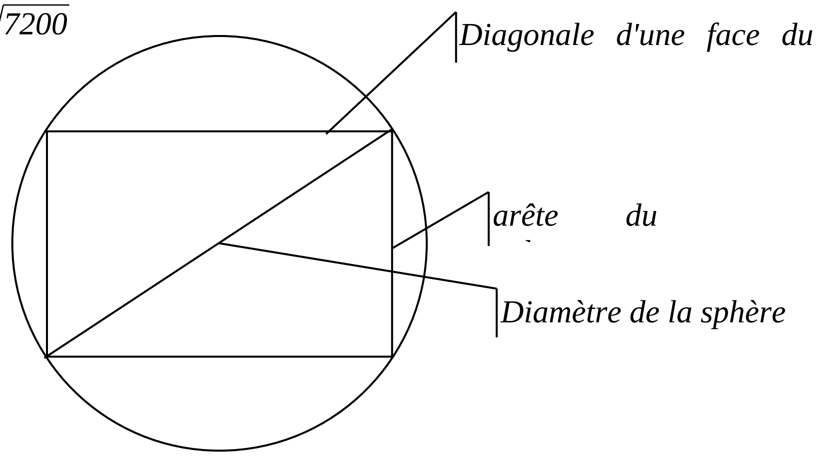
L ≈ 2 × 3,14 × 6 400 × 0,788 ≈31 670 km.

Exercice 10

Planète	Mercure	Mars	Jupiter
Rayon (en km)	2 420	3 395	71 600
Aire (en km_)	$7{,}36 . 10^{7}$	$1{,}45 . 10^{8}$	$6{,}44 . 10^{10}$
Volume (en km^3)	$5{,}9 . 10^{10}$	$1{,}6 . 10^{11}$	$1{,}5 . 10^{15}$

Exercice 11

1. *Une face du cube est un carré de côté 60 cm. La diagonale fait apparaître deux triangles rectangles isocèles. En appliquant la relation de Pythagore, on obtient d_ = a_ + a_, où a est la longueur du côté du carré. Donc d_ = 2a_ = 2 × 60_ = 7 200, donc* $d = \sqrt{7200}$
2.



3. *Le diamètre D de la sphère vérifie la relation de Pythagore : D_ = d_ + a_ (où d est la diagonale de la face du cube et a l'arête du cube). a = 60 et* $d = \sqrt{7200}$ *, donc : D_ = 60_ + 7 200 = 10 800, d'où* $D = \sqrt{10800} \approx 104$ *cm.*
4. ***A*** *= 4πR_ ≈ 4 × 3,14 × 52_ ≈ 34 000 cm_*

Exercice 12

On calcule le volume de l'atmosphère par la différence entre le volume de la boule formée par l'ensemble Terre + atmosphère et la Terre.

$$V = \frac{4}{3} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow 6800^3 - \frac{4}{3} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow 6400^3 = \frac{4}{3} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow (6800^3 - 6400^3) \quad 2{,}2 \leftrightarrow 10^{11} km^3$$

On convertit en dm^3 *:* $V \approx 2{,}2 \times 10^{11} \times 10^{12} = 2{,}2 \times 10^{23}\ dm^3$

On obtient donc une masse de $2{,}2 \times 10^{23}$ *g ou* $2{,}2 \times 10^{20}$ *kg.*

Exercice 13

Le rayon R de la sphère est 15 cm. La distance d entre les deux centres est d = 5 cm.

Le rayon r du disque d'intersection vérifie la relation de Pythagore : r_ = R_ - d_ , d'où :
r_ = 15_ - 5_ = 225 - 25 = 200 et $r = \sqrt{200}$

L'aire du disque ; ***A*** *= πr_ = 200π ≈ 628 cm_.*

Exercice 14

1. *Volume de la boule de rayon R :*

$$V = \frac{4}{3} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow R^3 = \frac{4}{3} \leftrightarrow 3{,}14 \leftrightarrow 237^3 \quad 55733129 mm^3 \quad 56 dm^3$$

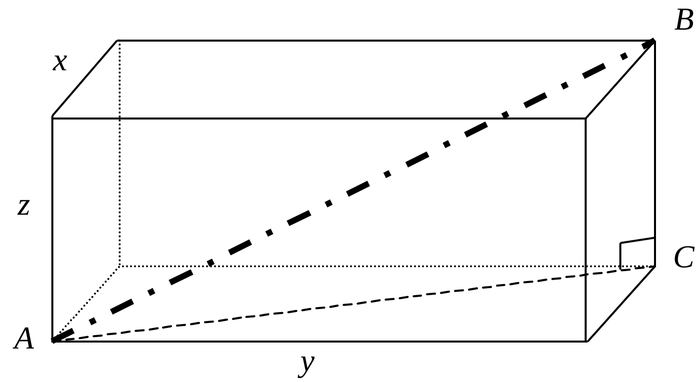
2. *L'ensemble eau + boule forme un cylindre de rayon R et de hauteur 2R. Son volume est donc égal à :* $V_2 = \pi \leftrightarrow R? \leftrightarrow 2R = 3{,}14 \leftrightarrow 237? \leftrightarrow 474 \quad 83599692 mm^3 \quad 83 dm^3$
3. *La hauteur de l'eau quand il y a la boule : 2R = 474 mm*
4. *Le volume de l'eau seule est égal à la différence entre les deux volumes* V_2 *et* V_1 *. Ce qui donne V ≈ 83 - 56 = 27* dm^3 *Cette eau forme un cylindre de rayon R et de hauteur h, telle que V = πR_h , donc* $h = \frac{V}{\pi \leftrightarrow R?} = \frac{27}{3{,}14 \leftrightarrow 2{,}37?} \quad 1{,}53\ dm$

Exercice 15

R = D/2   *R = P/2π* $R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ $R = \sqrt{\frac{A}{4 \leftrightarrow \pi}}$

Exercice 16

1) *Pour calculer la longueur de la diagonale AB du pavé, on exprime d'abord la diagonale d'une face, par exemple AC. Dans la face du dessus, la diagonale fait apparaître des triangles rectangles dont les côtés mesurent x et y, et dont la diagonale AC est l'hypoténuse.*
   Donc AC_ = x_ + y_.
   Dans ABC, rectangle en C :
   AB_ = BC_ + AC_ = z_ + (x_ + y_). D'où : $AB = \sqrt{x\_ + y\_ + z\_}$



2) *On connaît AB = 18, y = 5 et z = 7. On cherche la valeur de x.*
   *En remplaçant dans l'égalité AB_ = z_ + (x_ + y_). on obtient : 18_ = x_ + 5_ + 7_*
   On obtient x_ = 250. Donc $\underline{\boldsymbol{x = \sqrt{250}}}$

Exercice 17

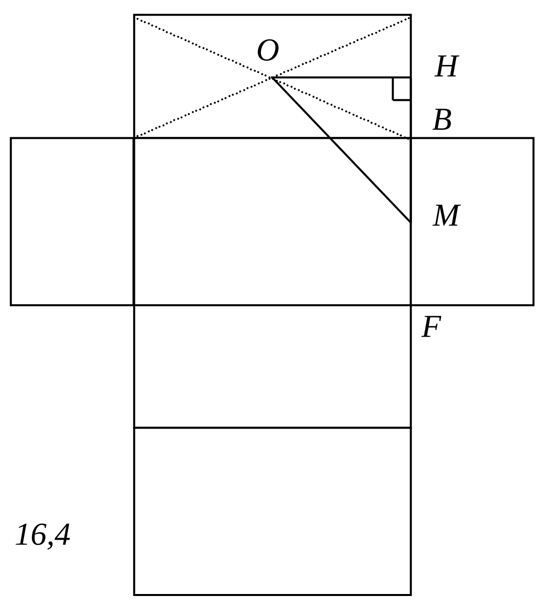
Quand M est au milieu de [BF]

Dans l'espace :

On calcule d'abord la longueur OB :
Dans ADB, rectangle en A :
DB_ = AD_ + AB_ = 12_ + 20_ = 144 + 400 = 544

$OB = \frac{DB}{2}$, *donc* $OB\_ = \frac{DB\_}{4} = \frac{544}{4} = 136$

$OM = \sqrt{OB\_ + MB\_} = \sqrt{136 + 7\_} = \sqrt{\mathbf{185}}$



Sur la surface latérale :

La plus courte distance est en ligne droite.
Soit H le milieu de [BC]
Dans OHM, rectangle en H :

$OM = \sqrt{OH\_ + HM\_} = \sqrt{10\_ + 13\_} = \sqrt{269} \approx 16{,}4$ *cm.*

Les calculs sont du même type lorsque M est en F. On obtient dans l'espace : $OM = \sqrt{332} \approx 18{,}2$ *cm.*
Sur la surface latérale : $OM = \sqrt{500} \approx 22{,}4$ *cm.*

Exercice 18

Vérifier que le nombre de cubes nécessaires pour chaque pyramide peut se calculer au moyen de la formule suivante dans laquelle n désigne le nombre d'étages :

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pour 2 étages : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{\mathbf{2x3x5}}{\mathbf{6}} = 5$ *,et 1 + 4 = 5*

Pour 3 étages $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{\mathbf{3x4x7}}{\mathbf{6}} = 14$ *, et 1 + 4 + 9 = 14*

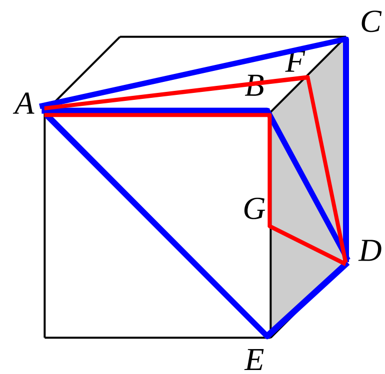
Pour 4 étages $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{\mathbf{4x5x9}}{\mathbf{6}} = 30$ *, et 1 + 4 + 9 + 16 = 30*

Nombre de cubes d'une pyramide à 6 étages : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{6x7x13}{6} = 91$

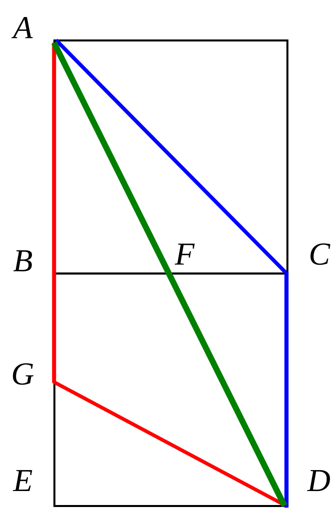
Nombre d'étages d'une pyramide utilisant 385 cubes :
Il faut que $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 385$*. Donc que n(n + 1)(2n + 1) = 2 310.*
En essayant différents valeurs on trouve n = 10.

Exercice 19

Les trois chemins D-B-A, D-C-A, et D-E-A sont identiques car ils sont composés d'une arête et d'une diagonale de face

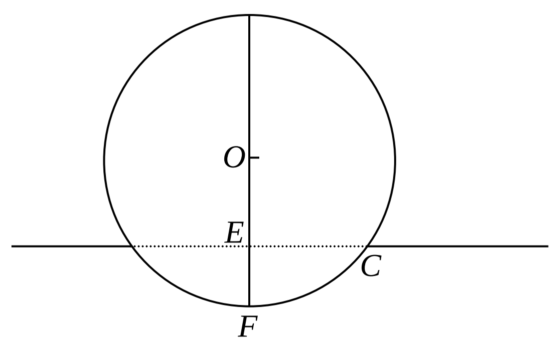


Pour retrouver le plus court chemin on peut développer le cube et se placer dans deux faces contiguës
C'est le chemin qui passe par F.



Exercice 20

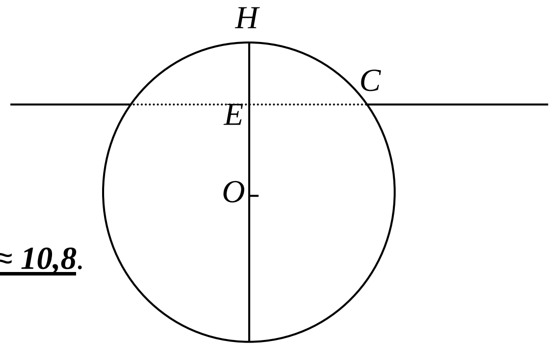
1) *On sait que OF =* $\dfrac{25}{2}$ *= 12,5 cm et EF = 3 cm,*
donc OE = 9,5
Dans OEC, rectangle en E : EC = $\sqrt{OC\_ - OE\_}$
EC = $\sqrt{12,5\_ - 9,5\_}$ *=* $\sqrt{66}$ **≈ 8,1cm**.



2) Si le ballon est enfoncé aux trois quarts de sa hauteur, EH représente $\frac{1}{4}$ de la hauteur (c'est à dire du diamètre).

$HE = \frac{25}{4}$, donc $OE = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$.

$EC = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{12,5^2 - 6,25^2} = \sqrt{117,1875} \approx \mathbf{10,8}$.



Exercice 21

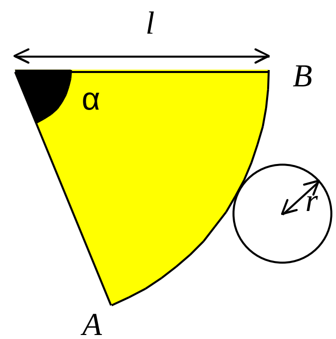
Pour que les deux parties du patron soient cohérentes (qu'elles se recollent parfaitement ensemble), il faut que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ soit égale à la longueur du cercle de base.

L, la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle α .Si $\alpha = 360°$, $L = 2\pi l$

Donc pour un angle α : $L = \frac{2\pi l}{360} \times \alpha$

La longueur du cercle de base est égale à $2\pi r$.

Il faut donc que $\frac{2\pi l}{360} \times \alpha = 2\pi r$.



En simplifiant par 2π , on obtient : $\frac{l}{360} \times \alpha = r$. Cette relation peut se présenter de diverses manières :

$$\frac{r}{l} = \frac{\alpha}{360} \qquad \text{ou } l = r \times \frac{360}{\alpha} \qquad \text{ou } \alpha = \frac{r}{l} \times 360$$

La relation : $\frac{r}{l} = \frac{\alpha}{360}$ est essentielle. Elle signifie que le rapport du petit rayon au grand est le même que le rapport de l'angle au tour complet.

Par exemple : si l'angle est le quart d'un tour (90°), alors r est le quart de l.

1er cas :

$l = 6$ cm et $\alpha = 40°$. α représente $\frac{1}{9}$ de tour. Donc r représente $\frac{1}{9}$ de l . $r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ cm.

2ème cas :

$l = 18$ et $r = 3$. r représente $\frac{1}{6}$ de l. Donc α représente $\frac{1}{6}$ de tour, soit 60°

3ème cas :

$\alpha = 60°$ et $r = 2$ cm. α représente $\frac{1}{6}$ de tour, donc l est 6 fois r, soit 12 cm.

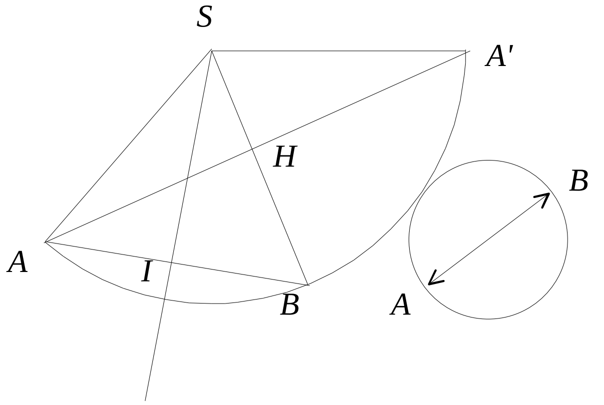
4ème cas :

$l = 2r$. l est le double de r, donc α est la moitié d'un tour, soit 180°.

Exercice 22

On sait que AB = 4 cm, donc r = AO = 2 cm. SO = 6 cm.
*On calcule SA dans SAO rectangle en O : SA = √SO_ + OA_ = √6_ + 2_ = √**40 ≈ 6,3.***

$\alpha = \frac{r}{l} \times 360 = \frac{2}{\sqrt{40}}$ ↔360 114Y



Pour que A et B soient diamétralement opposés sur le cercle de base, il faut que B soit le milieu de $\overset{\frown}{AA'}$. Pour cela, on trace la médiatrice de [AA'], elle coupe $\overset{\frown}{AA'}$ en B et [AA'] en H.
Le plus court chemin de A à B sur cette surface latérale est la ligne droite. Pour calculer AB on utilise I , son milieu.
Dans SIB, rectangle en I,

$\widehat{BSI} = \frac{1}{2}\widehat{BSA} = \frac{1}{4}\widehat{ASA'} = 28{,}5°.$

SA = √40 . On calcule BI par le cosinus de $\widehat{IBS}$:

Dans ASB isocèle : $\widehat{IBS} = \frac{1}{2}(180 - \widehat{ASB}) = \frac{180\text{-}57}{2} = 61{,}5°$

*BI = BS × cos $\widehat{IBS}$ = √40 × cos61,5 ≈ **3 cm**.. D'où **AB ≈ 6 cm.***

Le point I de l'énoncé s'appelle ici H. Calcul de AH :

Dans AHB, rectangle en H : $BH = \frac{BS}{2} \approx 3{,}15$.

*AH = √AB_ - BH_ ≈ √6_ - 3,15_ ≈ √26,1 ≈ **5,1 cm.***

En traçant le triangle SOP :

a) *On calcule $\widehat{OSP}$ par son cos :* $\cos \widehat{OSP} = \frac{OS}{OP} = \frac{6}{\sqrt{40}}$ *, d'où : $\widehat{OSP}$ ≈ 18°*

b) *OM est minimum lorsque (OM) (SP). Alors SM = SO × cos$\widehat{OSP}$ ≈ 6× cos18 ≈ **5,7 cm.***
*OM = √SO_ - SM_ ≈ √6_ - 5,7_ ≈ **1,9 cm.***