DM : Section de pyramide

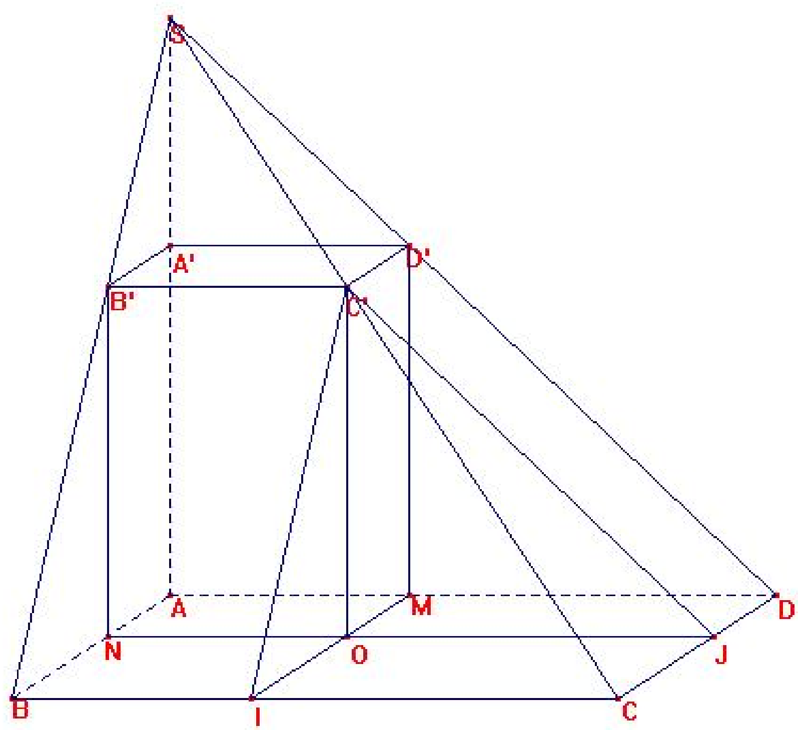
Le solide SABCD est une pyramide de sommet S et de base rectangulaire ABCD.

On a : SA = 8, AD=6, SD=10, AB = $\frac{10}{3}$, SB = $\frac{26}{3}$

Soit A' un point de [SA] tel que SA' = $\frac{1}{4}$ SA.

On coupe la pyramide SABCD par un plan passant par A' et parallèle au plan de base, celui-ci coupe [SB] en B', [SC] en C' et [SD] en D'.

O $\in$ [AC], M $\in$ [AD] , N $\in$ [AB] et (C'O)//(D'M)//(B'N)//(SA)
I $\in$ [BC] et (C'I)//(SB)
J $\in$ [DC] et (C'J)//(SD)



0/ On débroussaille

1. Démontrer que (SA) et (AD) sont perpendiculaires
2. Démontrer que (SA) et (AB) sont perpendiculaires
3. <u>Définition 1 :</u> On appelle hauteur de la pyramide la droite perpendiculaire au plan de la base et passant par le sommet. (attention suivant le contexte on peut aussi considérer la hauteur comme un segment ou une longueur)

   <u>Proposition 2 :</u> Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes, elle est perpendiculaire au plan contenant ces deux droites.

   A l'aide de la définition 1 et de proposition 2, démontrer que (SA) est la hauteur de la pyramide SABCD.

4. Quelle est la nature de A'B'C'D'. Calculer les longueurs des côtés.

I/ Calculs d'angles

1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SBA}$ à 1° près

2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SDA}$ à 1° près

3. **a)** Calculer AC

b) Proposition 3: Si une droite est perpendiculaire à un plan P en un point M alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par M.
A l'aide de la proposition 3 et de la question 0/ 3° , démontrer que SAC est rectangle en A.

c) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SCA}$ à 1° près

II/ Calcul du volume du tronc de pyramide par décomposition

1. **a)** Quelle est la nature du solide ANOMD'C'B'A' ?
b) Calculer le volume V_1 de ce solide.

2. **a)** Quelle est la nature du solide IOC'B'BN ? on précisera la base et la hauteur de ce solide.
b) Calculer le volume V_2 de ce solide.

3. **a)** Quelle est la nature du solide JOC'D'DM ? on précisera la base et la hauteur de ce solide.
b) Calculer le volume V_3 de ce solide.

4. **a)** Quelle est la nature du solide C'OICJ? on précisera la base et la hauteur de ce solide.
b) Calculer le volume V_4 de ce solide.

5. Déduire des questions précédentes le volume V_5 du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'.

III/ Calcul du volume du tronc de pyramide par soustraction

1. Calculer le volume V_6 de la pyramide SABCD
2. Calculer le volume V_7 de la pyramide SA'B'C'D'. Justifier
3. Déduire des questions précédentes le volume V_5 du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'

IV/ Patron et calculs d'aires

1. a)Construire le patron le la pyramide SABCD
b) Tracer avec précision les segments [A'B'], [B'C'], [C'D'], [D'A']

2. Calculer l'aire latérale A_1 la pyramide SABCD
3. En déduire l'aire latérale A_2 de la pyramide SA'B'C'D'
4. En déduire l'aire latérale A_3 du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'.
5. Calculer l'aire totale A_4 du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'.

V/ Paramétrage

on pose SA' = x
1. Donner un encadrement de x

2. Calculer AA' en fonction de x

3. A l'aide du théorème de Thalès montrer que A'D' = $\frac{3}{4}x$

4. Calculer la valeur de x pour que AMD'A' soit un carré.

Correction du DM SECTION DE PYRAMIDE

O/ On débroussaille

1°/ Dans le triangle SAD

$SA^2 + AD^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$SD^2 = 10^2 = 100$

donc $SD^2 = SA^2 + AD^2$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore SAD est rectangle en A.

2° Dans le triangle SAB rectangle en A

$AS^2 + AB^2 = 8^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 64 + \frac{100}{9} = \frac{676}{9}$

$SB^2 = \left(\frac{26}{3}\right)^2 = \frac{676}{9}$

donc $SB^2 = AS^2 + AB^2$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore SAB est rectangle en A.

3° (AB) et (AD) sont sécantes en A

$(SA) \perp (AD)$ et $(SA) \perp (AB)$

donc d'après la proposition 2. (SA) est perpendiculaire au plan (ABCD)

et d'après la définition 1. (SA) est la hauteur de la pyramide SABCD.

4° A'B'C'D' est la section d'une pyramide par un plan parallèle à la base donc A'B'C'D' est une réduction de la base or la base est le rectangle ABCD donc A'B'C'D' est une réduction de ABCD donc un rectangle.

On a : $\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{D'C'}{DC} = \frac{C'B'}{CB}$

or $\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{4}$

donc $A'B' = D'C' = \frac{AB}{4} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ cm

et $A'D' = B'C' = \frac{AD}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$cm

I/ Calculs d'angles

1° Dans SAB rectangle en A

$\cos(\widehat{SBA}) = \frac{AB}{SB} = \frac{10}{3} \times \frac{3}{26} = \frac{5}{13}$ donc $\widehat{SBA} \approx 67°$

2° Dans SDA rectangle en A

$\cos(\widehat{SDA}) = \frac{AD}{SD} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ donc $\widehat{SDA} \approx 53°$

3° a) Dans ABC rectangle en B

d'après le théorème de Pythagore $AC^2 = AB^2 + BC^2$

d'où $AC^2 = \frac{100}{9} + 36 = \frac{424}{9}$

donc $AC = \sqrt{\frac{424}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{106}$ cm

b) (SA) est perpendiculaire au plan (ABCD)

(AC) est un droite du plan (ABCD)

donc (SA) est perpendiculaire à (AC)

Dans le triangle SAC rectangle en A

$\tan(\widehat{SCA}) = \frac{SA}{AC} = \frac{8}{\frac{2}{3}\sqrt{106}}$ donc $\widehat{SCA} \approx 49°$

II/ Calcul du volume du tronc de pyramide par décomposition

1° a) ANOMD'C'B'A' est un pavé droit

b) Sachant que $SA' = \frac{1}{4}SA$ on en déduit que

$A'A = \frac{3}{4} SA = \frac{24}{4} = 6$ cm

$V_1 = A'B' \times A'D' \times A'A = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} \times 6 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}^3$

2° a) IOC'B'BN est un prisme droit

les bases sont les triangles rectangles IOC' et BNB' et la hauteur est ON = C'B' = IB

$V_2 = \text{Aire}(BNB') \times BI$

BNB' est rectangle en N

$NB = AB - AN$

$= AB - A'B' = \frac{10}{3} - \frac{5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$ cm

$NB' = AA' = 6$cm et $BI = B'C' = 1,5$ cm

Donc $\text{Aire}(BNB') = \frac{2,5´6}{2} = 7,5$ cm² et $V_2 = 7,5 \times 1,5 = 11,25 \text{cm}^3$

3° a) JOC'D'DM est un prisme droit

Les base sont les triangles rectangle OJC' et MDD' et la hauteur est OM=JD=C'D'

$V_3 = \text{Aire}(MDD') \times C'D'$

$MD = AD - AM = AD - A'D' = 6 - 1,5 = 4,5$ cm

$MD' = AA' = 6$cm et $C'D' = \frac{5}{6}$ cm

$\text{Aire}(MDD') = \frac{MD \ ´ \ MD'}{2} = \frac{4,5 \ ´ \ 6}{2} = 13,5$cm²

$V_3 = 13,5 \times \frac{5}{6} = 11,25 \text{ cm}^3$ (On constate que $V_2 = V_3$)

4° a) C'OICJ est une pyramide dont la base est le rectangle CJOI et la hauteur [OC']

b) $V_4 = \frac{\text{Aire}(CJOI) \ ´ \ OC'}{3}$

IO = 2,5cm OJ = 4,5cm OC' = 6cm

$V_4 = \frac{2,5´4,5´6}{3} = 22,5 \text{ cm}^3$

(On constate que $V_4 = V_2 + V_3$)

5° $V_5 = V_1+V_2+V_3+V_4=7,5+11,25+11,25+22,5=52,5\text{cm}^3$

III/ Calcul du volume du tronc de pyramide par soustraction

1° $V_6 = \frac{\text{Aire}(ABCD) \ ´ \ SA}{3} = 6 \times \frac{10}{3} \times 8 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{160}{3} \text{ cm}^3$

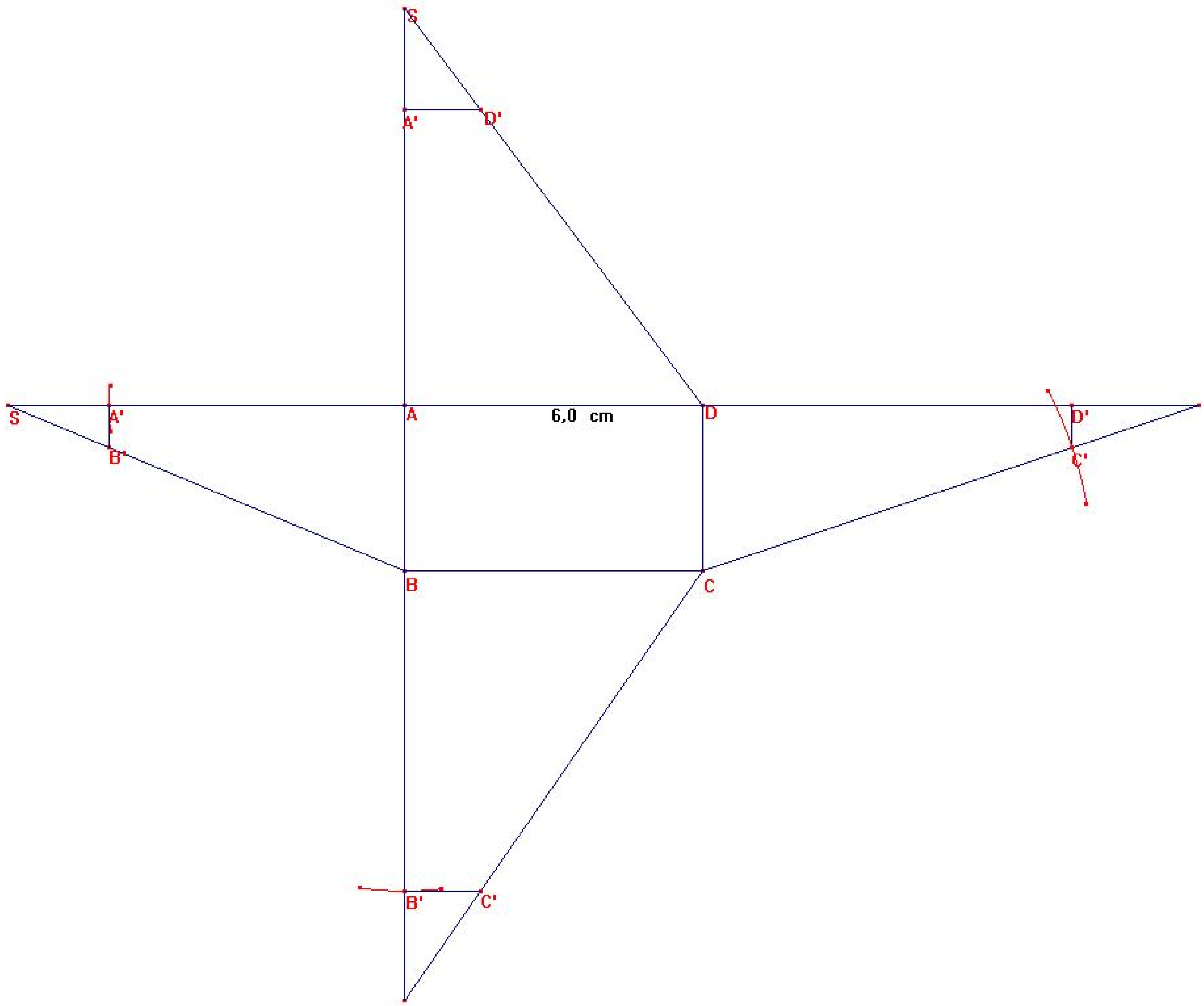
2° SA'B'C'D' est une réduction de SABCD à l'échelle $\frac{1}{4}$

donc $V_7 = (\frac{1}{4})^3 \times V_6 = \frac{160}{192} = \frac{5}{6} \text{ cm}^3$

3° $V_5 = V_6 - V_7 = \frac{160}{3} - \frac{5}{6} = \frac{105}{2} = 52,5 \text{ cm}^3$

IV/ Patron et calculs d'aires

1° a) b) cf. feuille jointe



2° A_1=Aire(SAB)+Aire(SAD)+Aire(SDC)Aire(SCB)

$A_1 = 8 \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{2} + 8 \times 6 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{26}{3} \times \frac{1}{2}$

$A_1 = 80$ cm²

3° SA'B'C'D' est une réduction de SABCD à l'échelle $\frac{1}{4}$. Donc $A_2 = A_1 \times (\frac{1}{4})^2 = \frac{80}{16} = 5$ cm²

4° $A_3 = A_1 - A_2 = 80 - 5 = 75$ cm²

5° $A_4 = A_3$ + Aire(A'B'C'D') + Aire(ABCD)

$= 75 + \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} + 6 \times \frac{10}{3}$

$= 96{,}25$ cm²

V/ Paramétrage

1° $A' \in [SA]$ donc $0 \leq x \leq 8$

2° $AA' = SA - SA' = 8 - x$

3° Dans SAD $A' \in [SA]$ $D' \in [SD]$ et $(A'D') // (AD)$ donc d'après le théorème de Thalès $\frac{SA'}{SA} = \frac{A'D'}{AD}$

donc $\frac{x}{8} = \frac{A'D'}{6}$ donc $A'D' = \frac{3}{4}x$

4° AMD'A' est un rectangle pour qu'il soit carré il suffit que A'D' = A'A (deux côtés consécutifs de la même longueur)

on veut A'D' = A'A donc $\frac{3}{4}x = 8 - x$ donc $\frac{3}{4}x + x = 8$ donc $\frac{7}{4}x = 8$ donc $7x = 32$ donc $x = \frac{32}{7}$

pour $x = \frac{32}{7}$ A'D'MA est un carré.