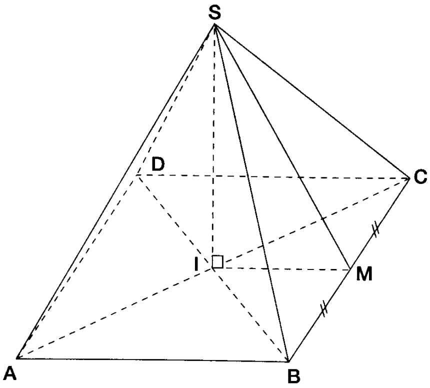
Exercice : (Limoges 1995) (5 points)

SABCD est une pyramide régulière dont la base est le carré ABCD de côté 5 cm et de centre I.

La hauteur [SI] de la pyramide a pour longueur SI = 3 cm.



1) Calculer le volume de la pyramide.

2) Soit M le milieu de l'arête [BC].

Démontrer que la longueur IM = 2,5 cm.

3) On admet que le triangle SIM est rectangle en I.

a) Calculer tan $\widehat{MSI}$.

b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{MSI}$ à 1° près.

Correction :

1)

$$V(SABCD) = \frac{Aire(Base) \times Hauteur}{3}$$

$avec \quad Aire(base) = 5 \times 5 = 25$

$et \quad Hauteur = SI = 3.$

$$Donc \quad V(SABCD) = \frac{25 \times 3}{3} = 25$$

Donc le volume de la pyramide est de 25 cm^3.

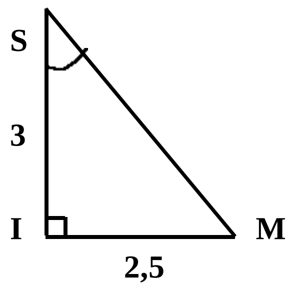
2) Dans le triangle BDC, M est le milieu de [BC] et, puisque I est le point d'intersection des diagonales du carré ABCD, I est le milieu de [DB].

D'après le théorème des milieux, la longueur du segment reliant les milieux de deux côtés d'un triangle est la moitié de la longueur du troisième côté.

Donc IM=1/2´BC

C'est-à-dire IM = 2,5 cm.

3) a) Dans le triangle SIM rectangle en I :



$$\tan \widehat{MSI} = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent}$$

$$\tan \widehat{MSI} = \frac{IM}{IS}$$

$$\tan \widehat{MSI} = \frac{2,5}{3}.$$

b) A la calculatrice en arrondissant, on obtient alors :

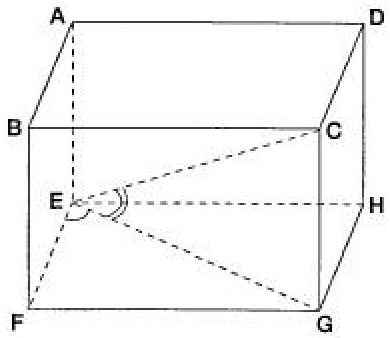
$\widehat{MSI} \approx 40°$

Exercice : (Nantes 1995) (4 points)
Pour cet exercice on donne les valeurs suivantes :

$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

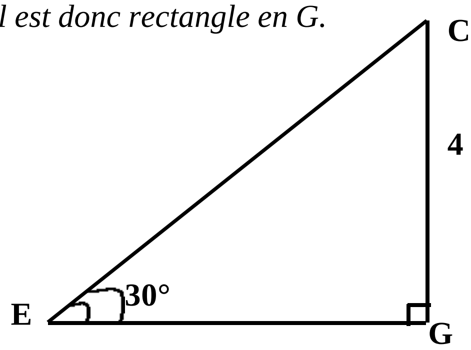
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60° = \frac{1}{2} \quad \tan 60° = \sqrt{3}$

On considère un pavé droit ABCDEFGH.
On donne :
CG = 4 cm
$\widehat{CEG} = 30°$
$\widehat{GEF} = 60°$
$\widehat{CGE} = 90°$



Sur le dessin ci-contre, qu'on ne demande pas de reproduire, les dimensions et les proportions ne sont pas respectées.
1) Démontrer que le segment [EG] mesure $4\sqrt{3}$ cm.
2) Calculer la mesure exacte de l'arête [FG].

Correction:
1) Le triangle EGC a un angle droit au sommet G : il est donc rectangle en G.
On connaît un côté et un angle aigu dans ce triangle:
ce côté est opposé à l'angle et on cherche la longueur du côté adjacent à cet angle. On a :



$\tan \widehat{CEG} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$\tan \widehat{CEG} = \frac{CG}{EG}$

$\tan 30° = \frac{4}{EG}$

$EG = \frac{4}{\tan 30°}$

$EG = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$EG = \frac{4 \times 3}{\sqrt{3}}$

$EG = 4 \times \sqrt{3}$ *en simplifiant par* $\sqrt{3}$.

2) Le triangle EFG est rectangle en F car EFGH est une face rectangulaire du pavé droit ABCDEFGH. Dans ce triangle, on connaît la longueur de l'hypoténuse et un angle aigu. La mesure cherchée est celle du côté opposé à cet angle:

$$\sin G\widehat{E}F = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}}$$

$$\sin G\widehat{E}F = \frac{FG}{EG}$$

$$FG = EG \times \sin G\widehat{E}F$$

$$FG = 4\sqrt{3} \times \sin 60° \quad d'après\ 1)$$

$$FG = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$FG = \frac{4 \times \sqrt{3}^2}{2}$$

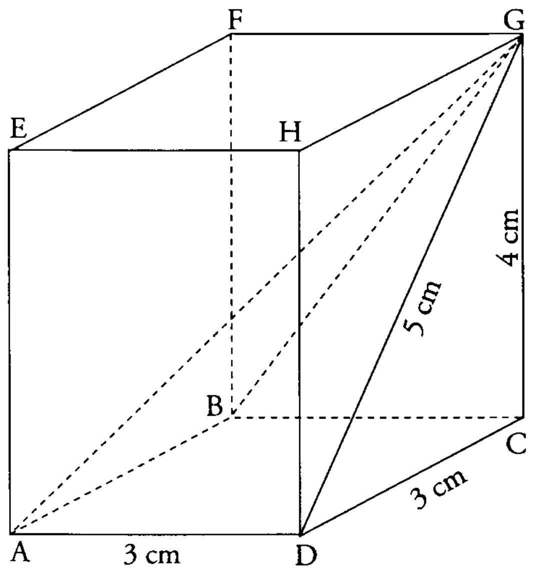
$$FG = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$FG = 6\ cm.$$

<u>Exercice : (Nantes 97)</u>

ABCDEFGH est un pavé F droit.

On donne : AD = DC = 3 cm ; GC = 4 cm ; GD = 5 cm.



Sur le dessin ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.

1) Calculer le volume, exprimé en cm^3, de la pyramide GABCD.

2) a) Dessiner en vraie grandeur le triangle ADG rectangle en D.

b) Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle AGD du triangle ADG.

c) Calculer la valeur exacte de la longueur AG, puis en donner la valeur arrondie au millimètre.

<u>Correction:</u>

1)

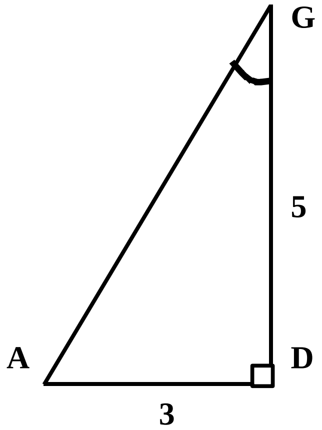
$$V(GABCD) = \frac{Aire(Base) \times Hauteur}{3}$$

$$V(GABCD) = \frac{3 \times 3 \times 4}{3}$$

$$V(GABCD) = 3 \times 4$$

$$V(GABCD) = 12\ cm^3.$$

1) a)



b) Dans le triangle rectangle AGD, le côté opposé de l'angle au sommet G est [AD] et le côté adjacent est [GD] :

$$\tan A\widehat{G}D = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent}$$

$$\tan A\widehat{G}D = \frac{AD}{GD}$$

$$\tan A\widehat{G}D = \frac{3}{5}$$

donc $A\widehat{G}D \approx 31°$ *avec la calculatrice.*

c) Le triangle AGD est rectangle en D alors, d'après le théorème de Pythagore, on a:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2$$

$$AG^2 = 3^2 + 5^2$$

$$AG^2 = 9 + 25$$

$$AG^2 = 34$$

donc $AG = \sqrt{34}.$

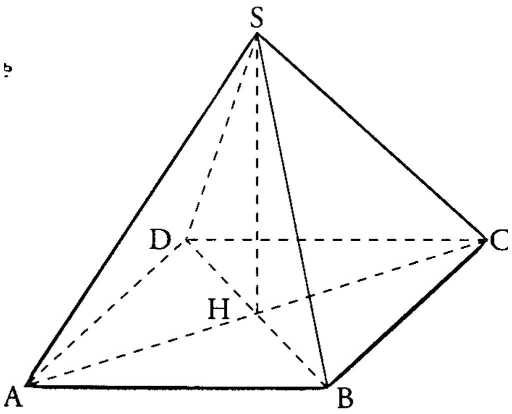
$$\sqrt{34} \approx 5{,}830951...$$

donc $AG \approx 5{,}8\ cm.$

<u>Exercice   : (Maroc 97)</u>

AC = BD = 12 ; SH = 12.

Un flacon a la forme d'une pyramide régulière SABCD. Sa base est un carré dont les diagonales mesurent 12 cm. Sa hauteur [SH] mesure aussi 12 cm.



1) a) Représenter en vraie grandeur le triangle SAC.

b) Calculer la valeur exacte de SA.

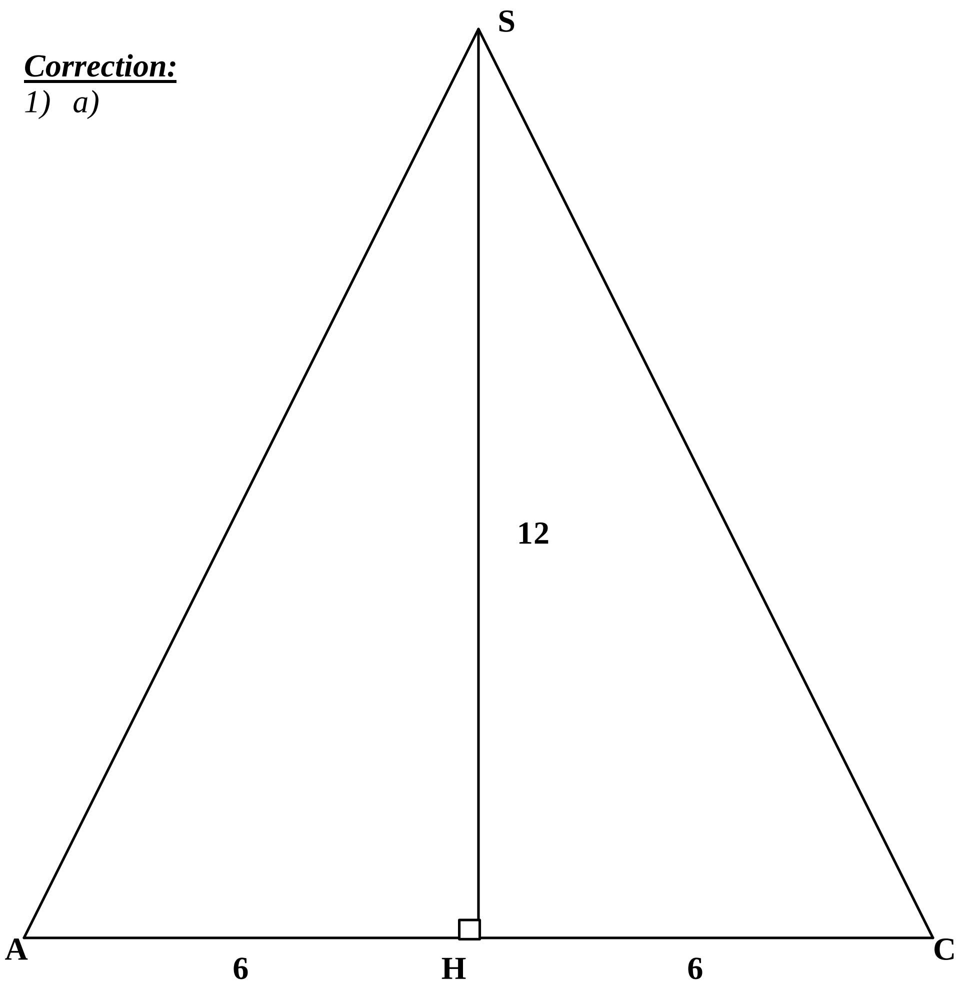
c) Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{SAC}$.

2) a) Calculer l'aire de la base ABCD de la pyramide.

b) En déduire le volume de la pyramide SABCD.

Correction:

1) a)



b) Dans le triangle SAH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a:

$SA^2 = AH^2 + HS^2$

$SA^2 = 6^2 + 12^2$

$SA^2 = 36 + 144$

$SA^2 = 180$

$SA = \sqrt{180}$

$SA = \sqrt{9 \times 4 \times 5}$

$SA = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}$

$SA = 3 \times 2\sqrt{5}$

$SA = 6\sqrt{5}.$

c)

L'angle $\widehat{SAC}$ est l'angle $\widehat{SAH}$:

on se place dans le triangle SAH rectangle en H.

$$\tan \widehat{SAH} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH}$$

$$\tan \widehat{SAH} = \frac{12}{6}$$

$\tan \widehat{SAH} = 2$

donc $\widehat{SAH} \approx 63°$

$\widehat{SAC} \approx 63°.$

2) a) Le carré ABCD peut se décomposer en deux carrés de côtés 6.
Donc :
Aire(ABCD) = 2´6^2
Aire(ABCD) = 2´36
Aire(ABCD) = 72 cm^2.
On pouvait aussi déterminer la longueur du segment [AB] en se plaçant dans le triangle rectangle ABH et en utilisant le théorème de Pythagore.

b)

$$Volume(ABCDS) = \frac{Aire(ABCD) \times Hauteur}{3}$$

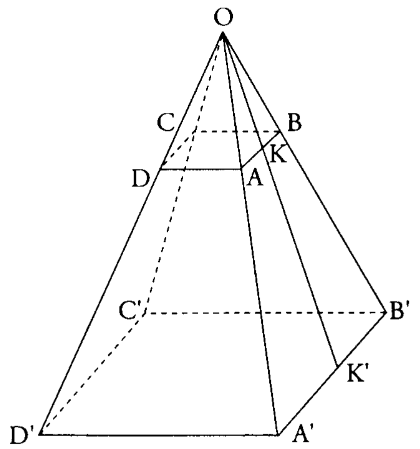
$$Volume(ABCDS) = \frac{72 \times 12}{3}$$

$Volume(ABCDS) = 72 \times 4$

$Volume(ABCDS) = 288\ cm^3.$

Exercice : (Polynesie 97)

Un abat-jour a la forme d'une pyramide régulière de sommet principal O. Sa base est un carré ABCD de côté 60 cm.
AO = 50 cm



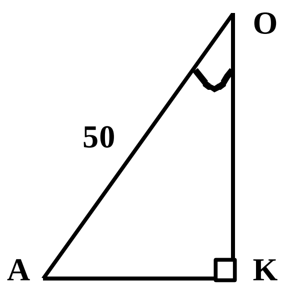
1. Quelle est la nature du triangle OAB?
2. K est le milieu du segment [AB].
a) Quelle est la nature du triangle AOK ? Pourquoi ?
b) Calculer $\sin \widehat{AOK}$.
c) Donner la valeur de l'angle $\widehat{AOK}$ arrondie au degré prés.

Angle	36°	37°	38°	39°
Sinus	0,588	0,602	0,616	0,629

d) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Montrer que OK = 40 cm.
4. La lumière de cet abat-jour est projetée sur le sol horizontal selon le carré A'B'C'D'. Le projeté du point A est le point A', le projeté du point K est le point K'. La droite (AB) est parallèle à la droite (A'B').
On sait que : OK' = 2,40 m.
a) Calculer A'K'.
b) Calculer l'aire de la surface A'B'C'D' éclairée sur le sol ; exprimer le résultat en m^2.

Correction :

1) *Le triangle OAB est isocèle de sommet principal le point O car la pyramide OABCD est régulière.*
2) *a) K est le milieu du segment [AB] donc K est un point de la médiatrice de [AB].*
Puisque le triangle OAB est isocèle de sommet principal O, OA=OB donc le point O appartient aussi à la médiatrice du segment [AB].
La droite (OK) est donc la médiatrice du segment [AB] donc les droites (OK) et (AB) sont perpendiculaires. Les droites (AB) et (AK) sont confondues donc les droites (OK) et (AK) sont perpendiculaires :
Le triangle AOK est rectangle en K.
b) Dans le triangle rectangle OAK, le segment [AK] est le côté opposé de l'angle au sommet O et le segment [AO] est l'hypoténuse :



$$\sin A\widehat{O}K = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin A\widehat{O}K = \frac{AK}{AO}$$

$$\sin A\widehat{O}K = \frac{30}{50}$$

$$\sin A\widehat{O}K = \frac{3}{5}$$

$$\sin A\widehat{O}K = 0{,}6.$$

c) D'après le tableau donné dans l'énoncé, la valeur la plus proche est:

sin 37°»0,602

donc AÔK » 37°.

d) Puisque le triangle AOB est isocèle en O, la droite (OK) est aussi une bissectrice de ce triangle donc AÔB = 2AÔK.

D'après 2) c), AÔB » 2´37°

donc AÔB » 74°.

3) Le triangle AOK est rectangle en K, donc d'après le théorème de Pythagore, on a:

$OK^2+AK^2 = AO^2$

$OK^2 = AO^2–AK^2$

$OK^2 = 50^2–30^2$

$OK^2 = 2500–900$

$OK^2 = 1600$

$OK^2 = 40^2$

Donc OK = 40 cm.

4) a) Dans le triangle A'OK', les droites (AK) et (A'K') sont parallèles et les points O,A,A' et O,K,K' sont alignés dans cet ordre. On a alors d'après le théorème de Thalés :

$$\frac{A'K'}{AK} = \frac{OK'}{OK}$$

$$A'K' = AK \times \frac{OK'}{OK}$$

$$A'K' = 30 \times \frac{240}{40}$$

$$A'K' = 30 \times 6$$

$$A'K' = 180.$$

$$A'K' = 1{,}8\ m.$$

b) A'B' = 2A'K' = 3,6 m

et Aire(A'B'C'D') = $3{,}6^2$

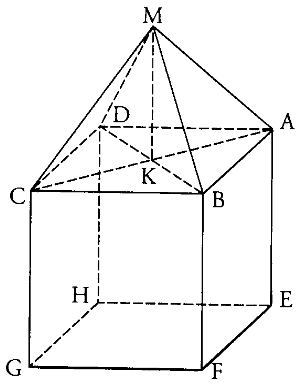
Aire(A'B'C'D') = 12,96

L'aire de la surface A'B'C'D' éclairée sur le sol est 12,96 m^2.

Exercice : (Poitiers 96)

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH sur lequel on a posé une pyramide régulière de base ABCD et de hauteur MK.

L'arête du cube mesure 6 cm.



l) Dans cette question on pose MK =x. Calculer x sachant que le volume du cube et de la pyramide réunis est 270 cm^3.

2) Dans cette question on donne MK = 4,5 cm.

a) Dessiner en vraie grandeur le carré ABCD.

b) Utiliser la figure précédente pour construire en vraie grandeur le triangle CMA et justifier votre construction.

c) Démontrer que $\tan M\hat{C}A = \frac{3}{4}\sqrt{2}$. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $M\hat{C}A$.

Correction:

2) V(cube)=6^3=216 cm^3.

$V(pyramide) = \frac{Aire(base) \times Hauteur}{3}$

$V(pyramide) = \frac{6 \times 6 \times x}{3}$

$V(pyramide) = 12x.$

$V(pyramide) + V(cube) = 270$

$12x + 216 = 270$

$12x = 270 - 216$

$12x = 54$

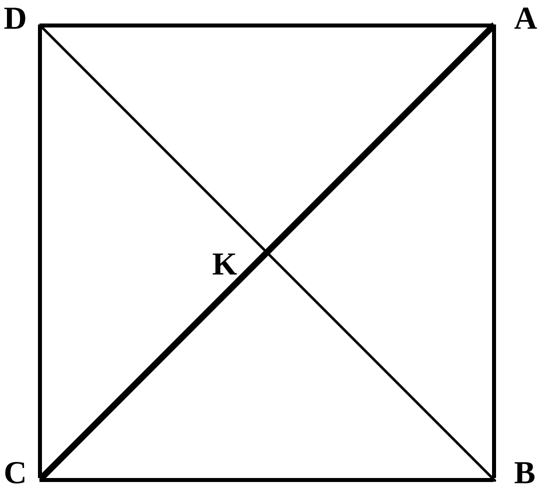
$x = \frac{54}{12}$

$x = \frac{9}{2}$

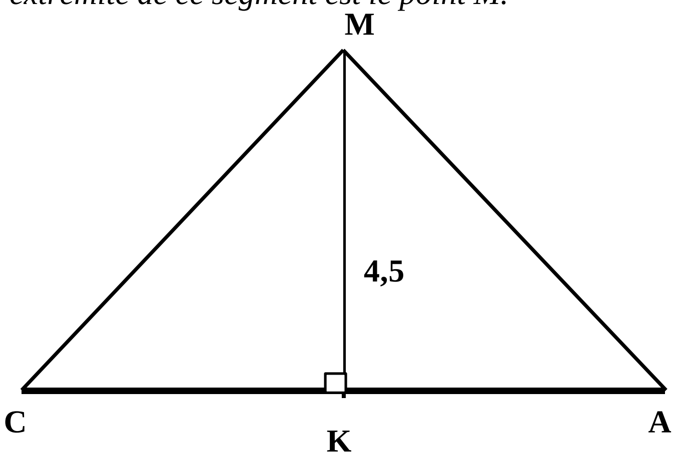
Donc $x = 4{,}5.$

Pour que le volume du solide soit de 270 cm^3, il faut que MK mesure 4,5 cm.

2) a)



b) Pour tracer le triangle CMA on trace d'abord le côté [CA] dont la longueur est donnée par la diagonale du carré ABCD.
On place le milieu K du segment [CA] et on trace un segment perpendiculaire à [CA] issu de K et de longueur 4,5 cm.
L'autre extrémité de ce segment est le point M.



c) L'angle recherché est un angle aigu du triangle rectangle CKM.
On connaît la longueur de son côté opposé : MK = 4,5 cm.
Déterminons la longueur de son côté adjacent [CK]:
On se place dans le triangle CKD rectangle en K (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires). D'après le théorème de Pythagore :

$CK^2+KD^2 = CD^2$

$2CK^2 = CD^2$

car KD = CK (les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu et ont même longueur)

$2CK^2 = 6^2$

$2CK^2 = 36$

$CK^2 = 18$

$CK = \sqrt{18}$

$CK = \sqrt{9\times 2}$

$CK = \sqrt{9}\times\sqrt{2}$

$CK = 3\sqrt{2}.$

Dans le triangle CKM :

$$\tan M\widehat{C}A = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan M\widehat{C}A = \frac{MK}{CK}$$

$$\tan M\widehat{C}A = \frac{4{,}5}{3\sqrt{2}}$$

$$\tan M\widehat{C}A = \frac{9}{2\times 3\sqrt{2}} \quad \textit{en remarquant que } 4{,}5 = \frac{9}{2}$$

$$\tan M\widehat{C}A = \frac{3\times 3\times\sqrt{2}}{2\times 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$\tan M\widehat{C}A = \frac{3\sqrt{2}}{2\times 2}$$

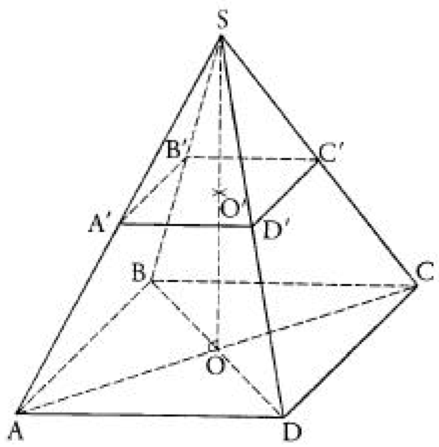
$$\tan M\widehat{C}A = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

On obtient :

$$M\widehat{C}A \approx 47°.$$

<u>Exercice : (Lille 96)</u>

(SABCD) est une pyramide de hauteur [OS].
Son volume est de 240 cm^3 et sa hauteur [OS] mesure 15 cm.



1) A partir de la formule donnant le volume de la pyramide, calculer l'aire de la base (ABCD).

2) O' est le point du segment [SO] tel que $O'S = \frac{1}{2}OS$.

Le plan passant par O' et parallèle à la base (ABCD) coupe les droites (SA) en A’, (SB) en B’, (SC) en C’ et (SD) en D’.

Calculer le volume de la pyramide (SA'B'C'D').
3) On donne OA = 5 cm.

En utilisant le triangle OSA rectangle en O, calculer au degré près la mesure de l'angle $O\hat{S}A$.
On pourra utiliser cet extrait de table trigonométrique :

tan 18° ≈ 0,325	cos 70° ≈ 0,342	sin 19° ≈ 0,326
tan 19° ≈ 0,344	cos 71° ≈ 0,326	sin 20° ≈ 0,342

Correction:

1)

$$V(SABCD) = \frac{Aire(Base) \times Hauteur}{3}$$

$$donc\ Aire(Base) = \frac{3 \times V(SABCD)}{Hauteur}$$

$$Aire(Base) = \frac{3 \times 240}{15}$$

$$Aire(Base) = \frac{3 \times 5 \times 48}{15}$$

$$Aire(Base) = 48\ cm^2.$$

2)On a les droites (A'O') et (AO) parallèles avec les points S,A',A et S,O',O alignés dans cet ordre donc d'après le théorème de Thalés on a:

$$\frac{A'S}{AS} = \frac{O'S}{OS}$$

$$\frac{A'S}{AS} = \frac{1}{2}\ car\ O'S = \frac{1}{2}OS$$

$$donc\ A'S = \frac{1}{2}AS.$$

$$De\ même \quad B'S = \frac{1}{2}BS, \quad C'S = \frac{1}{2}CS \quad et \quad D'S = \frac{1}{2}DS.$$

La pyramide SA'B'C'D' est donc une réduction de rapport 1/2 de la pyramide SABCD.
On a alors :

$$V(SA'B'C'D') = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V(SABCD)$$

$$V(SA'B'C'D') = \frac{1}{2^3} \times V(SABCD)$$

$$V(SA'B'C'D') = \frac{V(SABCD)}{8}$$

$$V(SA'B'C'D') = \frac{240}{8}$$

$$donc \quad V(SA'B'C'D') = 30\ cm^3.$$

3) Dans le triangle SOA rectangle en O, on connaît le côté opposé et le côté adjacent de l'angle au sommet S:

$$\tan O\widehat{S}A = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}}$$

$$\tan O\widehat{S}A = \frac{OA}{OS}$$

$$\tan O\widehat{S}A = \frac{5}{15}$$

$$\tan O\widehat{S}A = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \approx \tan 18°$$

donc $O\widehat{S}A \approx 18°$.