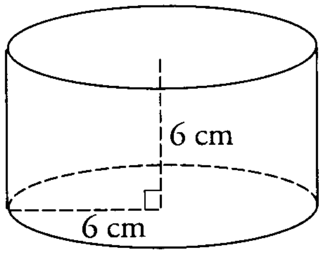
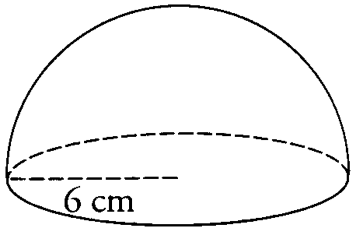
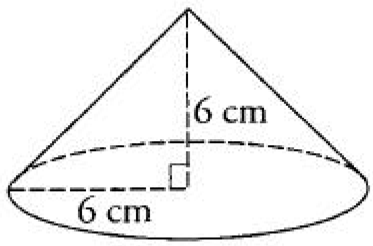
<u>Exercice   : (Aix 96)</u>

On considère le cylindre, la demi-boule et le cône représentés ci-dessous :





1) Vérifier au moyen d'un calcul que le volume V_1 du cylindre, exprimé en cm^3, est égal à 216π et que le volume V_2 de la demi-boule, exprimé en cm^3, est égal à $144\,\pi$.



2) Calculer en cm^3 le volume V_3 du cône sous la forme $k\pi$ (k étant un nombre entier).
3) On constate que $V_2 = 2V_3$.
En utilisant le formulaire donné ci-dessous, justifier ce résultat.

<u>FORMULAIRE :</u>

<u>Volume du cylindre :</u> *B ´ h*
B étant l'aire du disque de base,
h étant la hauteur du cylindre.

<u>Volume de la boule :</u> $\frac{4}{3} \times p \times r^3$
r étant le rayon de la boule.

<u>Volume du cône :</u> $\frac{1}{3}$ *´B´h*
B étant l'aire du disque de base,
h étant la hauteur du cône.

<u>Correction:</u>

1) Pour le cylindre:

$V_1 = Base \times Hauteur$

$V_1 = \pi r^2 \times Hauteur$

$V_1 = \pi 6^2 \times 6$

$V_1 = 216\pi.$

Pour la demi-boule :

$V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$

$V_2 = \frac{4}{6} \pi 6^3$

$V_2 = \frac{4 \times 6^2 \times 6\pi}{6}$

$V_2 = 4 \times 36\pi$

$V_2 = 144\pi.$

2)Pour le cône:

$V_3 = \frac{1}{3} B \times h \quad avec \quad B = \pi r^2, r = 6 \quad et \quad h = 6$

$V_3 = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 6$

$V_3 = \frac{36 \times 3 \times 2}{3} \pi$

$V_3 = 36 \times 2\pi$

$V_3 = 72\pi.$

Donc $V_3 = k\pi$ *avec* $k = 72.$

2) Pour une boule, le volume est: $\frac{4}{3} \pi r^3.$

Pour la demi-boule:

$V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3.$

Pour le cône:

$V_3 = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 \times r \quad car \quad h = r \;\; ici$

$V_3 = \frac{1}{3} \pi r^3.$

On a :

$\frac{2}{3} \pi r^3 = 2 \times \frac{1}{3} \pi r^3$

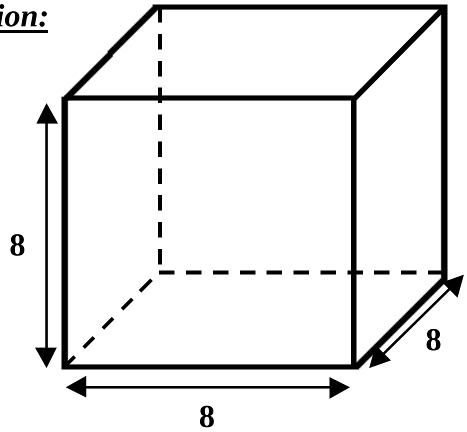
$V_2 = 2 \times V_3.$

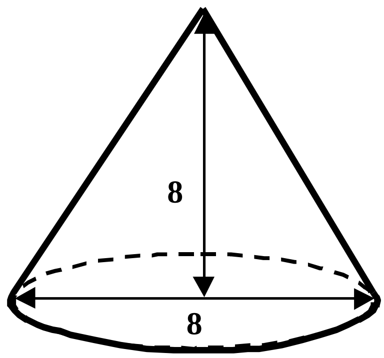
Exercice ___ : (Poitiers 97) (ANIME)

Un cube a des arêtes de 8 cm. Un cône de révolution a une base de 8 cm de diamètre et une hauteur de 8 cm.

1) Calculer le volume du cube.
2) a) Calculer la valeur exacte du volume du cône.
   b) Quel est le volume du cône arrondi au cm^3 ?
3) On place le cône à l'intérieur du cube. Occupe-t-il plus de 30 % du volume du cube ? Justifier votre réponse.

Correction:





1) Le cube a pour volume le produit de ses dimensions (longueur´largeur´hauteur):
8´8´8 = 8^3 = 512
Le volume du cube est 512 cm^3.
2) a) La base est un disque de rayon r = 4 cm et la hauteur h mesure 8cm.
Le volume du cône est:

$$V = \frac{1}{3} B \times h \quad avec \quad B = \pi r^2, r = 4 \quad et \quad h = 8$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8$$

$$V = \frac{16 \times 8}{3} \pi$$

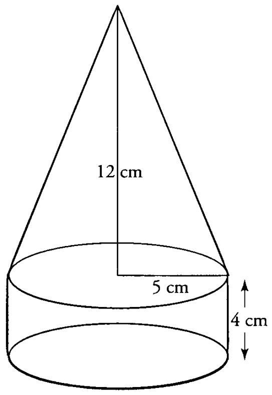
$$V = \frac{128}{3} \pi$$

Le volume du cône est $\frac{128\pi}{3}$ *cm^3.*

b) Avec la calculatrice, en prenant 3,1415926…comme valeur approchée de π, le volume est environ 134,041286…
Donc le volume du cône arrondi au cm^3 est 134.
3) Calculons 30% de 512:
0,3´512 = 153,6
Par rapport au résultat obtenu au 2) b), le volume V du cône vérifie:
V < 135 donc V < 153,6.
Par suite, le cône occupe moins de 30 % du cube.

Exercice : (Rouen 97)

L'objet ci-contre est constitué d'un cylindre et d'un cône de révolution ayant une base commune dont le rayon mesure 5 cm. La hauteur du cône mesure 12 cm, celle du cylindre mesure 4 cm.



On désigne par V_1 le volume du cône, par V_2 le volume du cylindre, et V_T est le volume total de l'objet.

1) Calculer les valeurs exactes de V_1 et V_2. Vérifier que $V_1 = V_2$.

2) En déduire la valeur exacte du volume total V_T puis en donner une valeur arrondie au cm^3.

Correction:

1) En notant $h_1 = 12$, $r = 5$ et $h_2 = 4$,

$$V_1 = \frac{1}{3} B \times h_1 \quad avec \quad B = \pi r^2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi 5^2 \times 12$$

$$V_1 = 4 \times 25\pi$$

$$V_1 = 100\pi.$$

$$V_2 = B \times h_2$$

$$V_2 = \pi 5^2 \times 4$$

$$V_2 = 4 \times 25\pi$$

$$V_2 = 100\pi$$

$$Donc\, V_1 = V_2 = 100\pi.$$

2) Le volume total du solide est donc:

$$V_T = 2 \times 100\pi$$

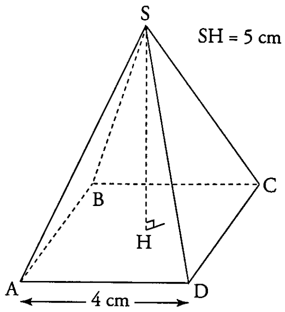
$$V_T = 200\pi$$

$$V_T \approx 628{,}3185\ldots \text{ avec la calculatrice}$$

$$donc \quad V_T \approx 628\ cm^3.$$

Exercice : (Aix 98) (ANIME)

Une pyramide régulière est représentée ici en perspective :



1. Sur le solide SABCD, nommer les arêtes de même longueur que [SA].
Quelle est la nature de la face ABCD ? Expliquer.
2. Calculer le volume de la pyramide SABCD.

Correction:

1) *On a une pyramide régulière, donc les faces triangulaires sont des triangles isocèles superposables de sommet principal S et la base est un carré :*

- *SA = SB = SC = SD;*
- *La face ABCD est un carré.*

2) *Avec une hauteur h de 5 cm et une base carrée de côté 4 cm:*

$$V(SABCD) = \frac{1}{3}B \times h$$

$$V(SABCD) = \frac{1}{3}4^2 \times 5$$

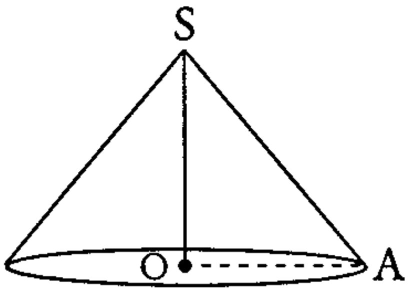
$$V(SABCD) = \frac{16 \times 5}{3}$$

$$V(SABCD) = \frac{80}{3}$$

Le volume de la pyramide est $\frac{80}{3}$ cm^3.

Exercice : (Grenoble 98)

La figure ci-contre représente un cône de hauteur SO = 20 cm et de base le cercle de rayon OA = 15 cm.



1. Calculer, en cm^3, le volume de ce cône; on donnera la valeur exacte sous la forme $k\pi$ (k étant un nombre entier).
2. Montrer que SA = 25 cm.
3. L'aire latérale de ce cône est donnée par la formule $\pi \times R \times SA$
(R désignant le rayon de la base). Calculer, en cm^2, cette aire ; on donnera la valeur exacte sous la forme $n\pi$ (n étant un nombre entier), puis une valeur arrondie à 10^{-1} prés.

Correction:

1) La base du cône est un disque de rayon OA et sa hauteur est SO :

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi OA^2 \times SO$$

$$V = \frac{1}{3} \pi 15^2 \times 20$$

$$V = \frac{5 \times 3 \times 15 \times 20}{3} \pi$$

$$V = 1500\pi$$

Le volume du cône est $1500\pi\ cm^3$.

2) La hauteur est perpendiculaire à la base dans un cône de révolution donc les côtés [SO] et [OA] sont perpendiculaires dans le triangle SOA : le triangle SOA est donc rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore, on a alors:

$SA^2 = SO^2 + OA^2$

$SA^2 = 20^2 + 25^2$

$SA^2 = 400 + 225$

$SA^2 = 625 = 25^2$

Donc SA = 25 cm.

3)

$$\pi \times R \times SA = \pi \times OA \times SA$$

$$\pi \times R \times SA = \pi \times 15 \times 25$$

$$\pi \times R \times SA = 375\pi$$

$$\pi \times R \times SA \approx 1178{,}0972...$$

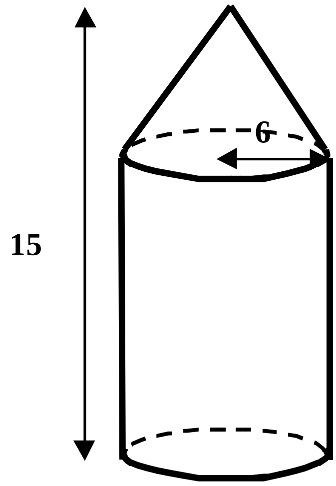
L'aire latérale exacte est $375\pi\ cm^2$

c'est-à-dire environ $1178{,}1\ cm^2$ *(arrondi à* 10^{-1} *).*

<u>Exercice   : (Poitiers 98)</u>

Un pigeonnier d'une hauteur totale de 15 mètres est formé d'une tour cylindrique de rayon 6 mètres, surmontée d'un toit conique.

1. Quelle est la hauteur de la tour, sachant qu'elle est égale aux deux tiers de la hauteur totale ?
2. Trouver la valeur exacte de l'aire de la surface latérale de la tour cylindrique.
3. Quel est le volume total du pigeonnier ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au mètre cube prés.



<u>Correction:</u>

1) $\frac{2}{3}15 = \frac{2\times5\times3}{3} = 10$

La tour a une hauteur de 10 m.

2) L'aire latérale de la tour est celle d'un rectangle:

- *de largeur l = 10 m*
- *de longueur L le périmètre du disque formant la base*

c'est-à-dire L = 2πr avec r = 6 m.

L'aire de ce rectangle est $l\times L = 10\times 2\pi\times 6 = 120\pi$.

L'aire latérale de la tour est 120π m^2.

3) Le solide se compose d'un cylindre de hauteur h_1 = 10 m,
de base un disque de rayon r = 6 m
et d'un cône de révolution de hauteur h_2 = 15 – 10 = 5 m,
de base un disque de rayon r = 6 m.

Pour la tour, le volume est:

$$B\times h_1 = \pi r^2\times h_1$$

$$B\times h_1 = \pi 6^2\times 10$$

$$B\times h_1 = 360\pi.$$

Pour le toit conique, le volume est:

$$\frac{1}{3}B\times h_2 = \frac{\pi r^2\times h_2}{3}$$

$$\frac{1}{3}B\times h_2 = \frac{\pi 6^2\times 5}{3}$$

$$\frac{1}{3}B\times h_2 = \frac{3\times2\times6\times5\pi}{3}$$

$$\frac{1}{3}B\times h_2 = 60\pi.$$

Au total : $360\pi + 60\pi = 420\pi.$

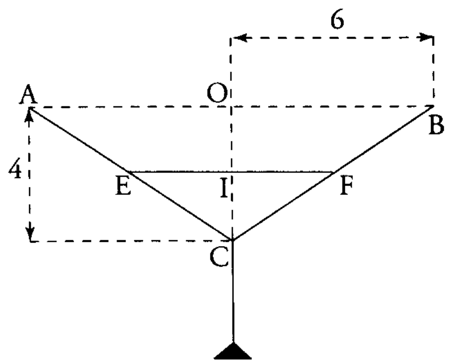
Le volume du pigeonnier est $420\pi\ m^3$.

Avec la calculatrice, $420\pi \approx 1319{,}468...$

Le volume du pigeonnier est d'environ 1319 m^3.

Exercice : (Orléans 97)
Dans un verre à pied ayant la forme d'un cône, et représenté ci-dessous en coupe, on laisse fondre 5 glaçons sphériques de 2 cm de diamètre.
L'unité étant le centimètre, on donne : OB = 6 OC = 4.

Rappel : *Volume d'une boule de rayon R :* $\frac{4}{3} \times p \times R^3$.



1) Quelle est la valeur exacte V en cm^3, du volume du verre ?

2) Montrer que le volume total de glace, en cm^3, est $\frac{20p}{3}$.

3) Lors de la fusion de la glace, le volume de l'eau produite est obtenu en multipliant par 0,9 celui de la glace.
Quelle est la valeur exacte W en cm^3, du volume de l'eau dans le verre, résultant de la fusion complète des 5 glaçons?
4) Prouver que V = 8 W.
5) En déduire la hauteur CI de l'eau dans le verre à pied après fusion complète de la glace.

Correction:

1) *Le volume du verre est celui d'un cône de hauteur 4 cm et de base un disque de rayon 6 cm.*

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

$$V = \frac{6^2 \times 4\pi}{3}$$

$$V = \frac{3 \times 2 \times 6 \times 4\pi}{3}$$

$$V = 2 \times 6 \times 4\pi$$

$$V = 48\pi$$

Le volume du verre est 48π *cm^3*.

2) *Chaque glaçon est une sphère de rayon r = 1 cm (puisque le diamètre est 2 cm). Le volume de chaque glaçon est :*

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi$

Pour 5 *glaçons :*

$5 \times \frac{4}{3}\pi = \frac{20}{3}\pi$

Le volume des glaçons est $\frac{20}{3}\pi.\ cm^3$.

3) *Après fusion, l'eau occupe:*

$W = 0{,}9 \times \frac{20}{3}\pi$

$W = \frac{3 \times 0{,}3 \times 20}{3}\pi$

$W = 0{,}3 \times 20\pi$

$W = 6\pi$

L'eau des 5 *glaçons a un volume de* $6\pi\ cm^3$.

4) $V = 48\pi = 8 \times 6\pi$ *et* $W = 6\pi$

Donc $V = 8W$.

5) *L'eau dans le verre constitue une réduction du verre ou le verre est un agrandissement du solide associé à l'eau : notons k le rapport de cet agrandissement.*

Dans ce cas, $V = k^3W$.

Or, $V = 8W = 2^3W$.

Donc $k = 2$.

Les dimensions associées au verre sont donc 2 fois plus grande que celle du solide associé à l'eau:

$CO = 2 \times CI$

Or $CO = 4$ *cm*

donc $CI = 2cm$.

La hauteur de l'eau dans le verre après fusion est 2 cm.