Cours 3ème

Calcul algébrique

Identités remarquables, développement, factorisation, équation produit.

I Développer et réduire une expression.

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme de termes la plus simple possible.
(on développe les produits, on supprime les parenthèses et on regroupe les termes identiques)

1. Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction. (cf. 5ème et 4ème)

Règles : a, b, c, d et k sont des nombres (réels) quelconques.

$\boxed{k \times (a + b) = k \times a + k \times b}$ $\boxed{k \times (a - b) = k \times a - k \times b}$

$\boxed{(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d}$

Exemples :

$A = 5(x + 3)$ $A = 5x + 15$	$B = 7(2x - 3y)$ $B = 14x - 21y$	$C = (3x + 2)(5x + 6)$ $C = 15x^2 + 18x + 10x + 12$ $C = 15x^2 + 28x + 12$	$D = (2x - 1)(5x - 6)$ $D = 15x^2 + 18x + 10x + 12$
$E = 4(x + 7) - (2x + 4)(3x - 1)$ $E = 4x + 28 - (6x^2 - 2x + 12x - 4)$ $E = 4x + 28 - 6x^2 + 2x - 12x + 4$ $E = -6x^2 - 6x + 32$	*Lorsque le développement est précédé d'un signe moins,* *on ouvre une parenthèse et on effectue le développement dedans.* *On supprime ensuite les parenthèses.*		

2. Les identités remarquables.

a et b sont deux nombres (réels) quelconques.

Carré d'une somme	Carré d'une différence	Produit d'une somme deux nombres par leur différence
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemples :

$A = (x + 9)^2$ $A = x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2$ $A = x^2 + 18x + 81$	$B = (x - 7)^2$ $B = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2$ $B = x^2 - 14x + 49$	$C = (x + 4)(x - 4)$ $C = x^2 - 4^2$ $C = x^2 - 16$
$D = (2x + 3)^2$ $D = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$ $D = 4x^2 + 12x + 9$	$E = (4x - 5)^2$ $E = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2$ $E = 16x^2 - 40x + 25$	$F = (2x - 9)(2x + 9)$ $F = (2x)^2 - 9^2$ $F = 4x^2 - 81$
$G = 2x - (x - 4)^2$ $G = 2x - (x^2 - 8x + 16)$ $G = 2x - x^2 + 8x - 16$ $G = -x^2 + 10x - 16$	*Lorsque le développement est précédé d'un signe moins,* *on ouvre une parenthèse et on effectue le développement dedans.* *On supprime ensuite les parenthèses.*	

II Factoriser une somme de termes

Factoriser une somme de termes c'est la transformer en un produit de facteurs.

<u>Méthode 1</u> : on recherche un facteur commun aux différents termes de la somme.

$A = 4x + 12$	*4 est un facteur commun à $4x$ et à 12*
$A = \mathbf{4} \times x + \mathbf{4} \times 3$	*On fait apparaître le facteur commun et on l'entoure en rouge dans chaque terme.*
$A = 4 \times (x + 3)$	*On applique la règle de la distributivité* (dans le sens de la factorisation)

$B = 5a^3 - 25a$
$B = \mathbf{5a} \times a^2 - \mathbf{5a} \times 5$
$B = 5a\,(a^2 - 5)$

$C = 12x^5 + 4x^2 - 2x$
$C = \mathbf{2x} \times 6x^4 + \mathbf{2x} \times 2x - \mathbf{2x} \times 1$
$C = \mathbf{2x} \times 6x^4 + \mathbf{2x} \times 2x - \mathbf{2x} \times 1$
$C = 2x\,(6x^4 + 2x - 1)$

$D = \mathbf{(2x + 1)}(7x - 3) + \mathbf{(2x + 1)}(x + 2)$
$D = (2x + 1)[(7x - 3) + (x + 2)]$
$D = (2x + 1)(7x - 3 + x + 2)$
$D = (2x + 1)(8x - 1)$

$E = \mathbf{(5x - 1)}(3x - 7) - \mathbf{(5x - 1)}(5x - 3)$
$E = (5x - 1)\,[(3x - 7) - (5x - 3)]$
$E = (5x - 1)\,(3x - 7 \mathbf{-} 5x \mathbf{+} 3)$
$E = (5x - 1)\,(-2x - 4)$

<u>Méthode 2</u> : on reconnaît une identité remarquable.

$F = x^2 + 10x + 25$	*Cette expression ressemble à **a² + 2ab + b²** qui vaut (a + b)²*
$F = x^2 + 10x + 5^2$	***a** vaudrait x et **b** vaudrait 5. Vérifions si $10x$ est le double produit **2ab**.*
$F = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$	*$10x$ est bien le double produit donc ...*
$F = (x + 5)^2$	

$G = 9x^2 - 24x + 16$	*Cette expression ressemble à **a² – 2ab + b²** qui vaut (a – b)²*
$G = (3x)^2 - 24x + 4^2$	***a** vaudrait $3x$ et **b** vaudrait 4. Vérifions si $24x$ est le double produit **2ab**.*
$G = x^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2$	*$24x$ est bien le double produit donc ...*
$G = (3x - 4)^2$	

$H = 9x^2 - 16$	*Cette expression ressemble à **a² – b²** qui vaut (a + b) (a – b)*
$H = (3x)^2 - 4^2$	***a** vaut $3x$ et **b** vaut 4 donc ....*
$H = (3x + 4)(3x - 4)$	

III Résolution d'une équation produit du type $(ax + b)(cx + d) = 0$

1. <u>Produit nul.</u>

Si A = 0 ou B = 0 alors A × B = 0
Si A × B = 0 alors A = 0 ou B = 0 (c'est la réciproque)

Autrement dit :

Dire qu'un produit de facteurs est nul revient à dire que l'un au moins de ses facteurs est nul.

2. <u>Exemple</u> : résoudre l'équation $(4x + 1)(9x - 7) = 0$

Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'égalité donnée.
Ici on veut qu'un produit de deux facteurs soit égal à zéro (nul).

Dire qu'un produit de facteurs est nul revient à dire que l'un au moins de ses facteurs est nul (cf. 1.).

On a donc $4x + 1 = 0$	ou	$9x - 7 = 0$
$4x = -1$	ou	$9x = 7$
$x = -\frac{1}{4}$	ou	$x = \frac{7}{9}$

<u>Conclusion</u> : Les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{4}$ **<u>et</u>** $\frac{7}{9}$.