1 Développement et Factorisation.

1.1 Egalité k(a +b) = ka + kb

Propriété : quels que soient les relatifs a, b et k on a : k(a + b) = ka + kb

De gauche à droite on développe, de droite à gauche onfactorise.

Exemples : $-3(x+2) = -3 \times x + (-3) \times 2 = -3x - 6$ développement
$5x - 15 = 5 \times x - 5 \times 3 = 5(x - 3)$ factorisation
$2(y - 9) = 2[y + (-9)] = 2y + (-2) \times (-9) = 2y - 18$ développement
$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$ factorisation

Vérification : pour vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur on peut choisir un nombre qui remplacera l'inconnue dans les premières et dernières expressions. On doit alors trouver le même résultat.

Exemples : si $x=5$, $-3(x+2) = -3(5+2) = -3 \times 7 = -21$ et $-3x - 6 = -3 \times 5 - 6 = -15 - 6 = -21$

si $y=10$, $2(y-9) = 2(10-9) = 2\times1= 2$ et $2y - 18 = 2\times10 - 18 = 20 - 18 = 2$

1.2 (a +b)(c + d)

Propriété : quels que soient les relatifs a, b, c et d on a (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd

De gauche à droite on développe.

Exemples : $A = (3 + x)(x + 7) = 3x + 3 \times 7 + x \times x + x \times 7 = 3x + 21 + x^2 + 7x$

$B = (x - 3)(2x + 5) = [x + (-3)] (2x + 5) = x \times 2x + x \times 5 + (-3) \times 2x + (-3) \times 5$
$B = 2x^2 + 5x - 6x -15$

$C = (y - 7)(-5 - y) = [y + (-7)][-5 + (-y)]$
$C = y \times (-5) + y \times (-y) + (-7) \times (-5) + (-7) \times (-y)$
$C = -5y - y^2 + 35 + 7y$

Après avoir développer il est souvent demandé de réduire, voir ALG 8.

Vérification : il est conseillé de vérifier ses développements en choisissant un nombre qui remplacera l'inconnue dans les premières et dernières expressions.

Exemple : Si $x = 2$ on a $(3 + x)(x+ 7) = (3 + 2)(2 + 7) = 5 \times 9 = \mathbf{45}$
et $3x + 21 + x^2 + 7x = 3 \times 2 + 21 + 2^2 + 7 \times 2 = 6 + 21 + 4 +14 = \mathbf{45}$

1.3 Identités remarquables

Soit a et b deux nombres.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Exemples :
$(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$
$(5x - 3)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$
$(3x + 7)(3x - 7) = (3x)^2 - 7^2 = 9x^2 - 49$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 3^2 - \sqrt{5}^2 = 9 - 5 = 4$
$(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$
$(101)^2 = 100^2 + 200 + 1^2 = 10201$ (calcul mental)

1.4 Quelques méthodes de factorisation

1) Pour factoriser une expression, on peut chercher un facteur commun. Cela peut être un nombre, une lettre remplaçant un nombre, une expression.

Exemples :
$A = \mathbf{5}(x + 5) + \mathbf{5}(x-2) = \mathbf{5}[(x + 5) + (x - 2)] = 5(x + 5 + x - 2) = 5(2x + 3)$
$B = 3\boldsymbol{x} - 8\boldsymbol{x} = (3-8)\boldsymbol{x} = -5\boldsymbol{x}$
$C = \mathbf{4}(x + 2)\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{x}(3x + 5) = \mathbf{4}\boldsymbol{x}[(x + 2) + (3x + 5)] = \mathbf{4}\boldsymbol{x}(x + 2 + 3x + 5) = \mathbf{4}\boldsymbol{x}(3x + 7)$
$D = (x + 5)\mathbf{(2x + 5)} + \mathbf{(2x + 5)}(3x - 8) = \mathbf{(2x + 5)}[(x + 5) + (3x - 8)] = (2x + 5)(x + 5 + 3x - 8)$
$D = (2x + 5)(4x - 3)$

Les factorisations se vérifient comme les développements (voir 7-2)

Attention à quelques cas :

la soustraction :
$E = 3(5x - 2) - 3(2x - 7) = 3[(5x - 2) - (2x - 7)] = 3(5x - 2 - 2x + 7)$ (fiche 8)

le terme « sans facteur » :
$F = (3x + 7)(x + 5) + (x + 5) = (3x + 7)(x + 5) + (x + 5) \times 1 = (x + 5)[(3x + 7) + 1)$
$F = (x + 5)(3x + 8)$

le carré :
$G = (x + 3)^2 + (2x + 5)(x + 3) = \mathbf{(x + 3)}(x + 3) + (2x + 5)\mathbf{(x + 3)} = \mathbf{(x + 3)}[(x + 3) + (2x + 5)]$

Parfois le facteur commun est plus difficile à voir :

$H = (5x - 2)(3x - 1) + (10x - 4)(x + 1) = (5x - 2)(3x - 1) + 2(5x - 2)(x + 1)$
$H = (5x - 2)[(3x - 1) + 2(x + 1)]$
$H = (5x - 2)(3x - 1 + 2x + 2) = (5x - 2)(5x + 1)$

$I = (x - 3)(2x + 5) + 5(3 - x) = (x - 3)(2x + 5) + 5 \times (-1) \times (x - 3) = (x - 3)[(2x + 5) - 5]$
$I = (x - 3) \times 2x$

2) On peut aussi utiliser les identités remarquables (voir 7-3, de droite à gauche)

$A = 25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = (5x + 2)^2$
$B = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x - 4)^2$
$C = (x + 5)^2 - 4 = (x + 5) - 2^2 = [(x + 5) - 2][(x + 5) + 2] = (x + 3)(x + 7)$
$D = (2x - 1)^2 - (3x + 5)^2 = [(2x - 1) - (3x + 5)][(2x - 1) + (3x + 5)] = (2x - 1 - 3x - 5)(2x - 1 + 3x + 5)$
$D = (-x - 6)(5x + 4)$

2 Réduction et gestion des parenthèses.

2.1 Réduction

On réduit une expression lorsqu'on regroupe, par factorisation, les termes en x^2, puis ceux en x, puis les nombres 'seuls', etc…

Exemples : $3x + 21 + x^2 + 7x = x^2 + 3x + 7x + 21 = x^2 + 10x + 21$

$3x^2 - 5x + 6 - x^2 + 6x + 12 = 3x^2 - x^2 - 5x + 6x + 6 + 12 = 2x^2 + x + 18$

Il faut aussi penser à vérifier (voir ALG 7) lorsqu'on réduit une expression.

Exemple: si x=2, on a
$3x^2 - 5x + 6 - x^2 + 6x + 12 = 3\times2^2 - 5\times2 + 6 - 2^2 + 6\times2 + 12 = 12 - 10 + 6 - 4 + 12 + 12 = 28$
et $2x^2 + x + 18 = 2\times2^2 + 2 + 18 = 8+2+18=28$

2.2 Suppression des parenthèses dans une expression

- Si les parenthèses sont précédées du signe opératoire +, il suffit de supprimer les parenthèses (règle 2 de ALG 1-1)

Exemple : $3 + (x + 5) = 3 + x + 5 = 8 + x$

- Si les parenthèses sont précédées d'un signe opératoire $\times$, il suffit de développer (ALG 7) :

Exemples :

$5x \times (3x+4) = 5x \times 3x + 5x\times4 = 15x^2 + 20x$

$(x+4) \times 5 = 5(x+4) = 5x + 20$

$2 - 5 \times (2x + 5) = 2 + (-5) \times (2x + 5) = 2 + (-5)\times2x+ + (-5)\times5 = 2 - 10x - 25 = -10x -23$

- Si les parenthèses sont précédées du signe – , il s'agit d'une multiplication par (-1) donc il suffit de développer (voir aussi remarque ALG 2-4).

Exemple : $4x - (5x-2) = 4x + (-1)\times(5x+2) = 4x - 5x - 2 = -x - 2$