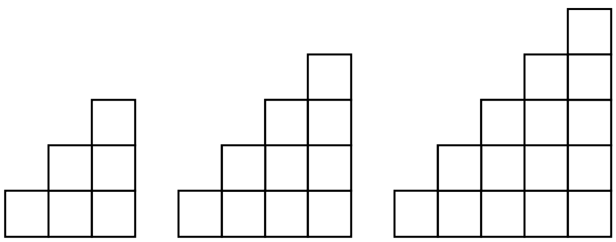
CHAPITRE 2
CALCULS ALGEBRIQUES

UTILISER DES LETTRES

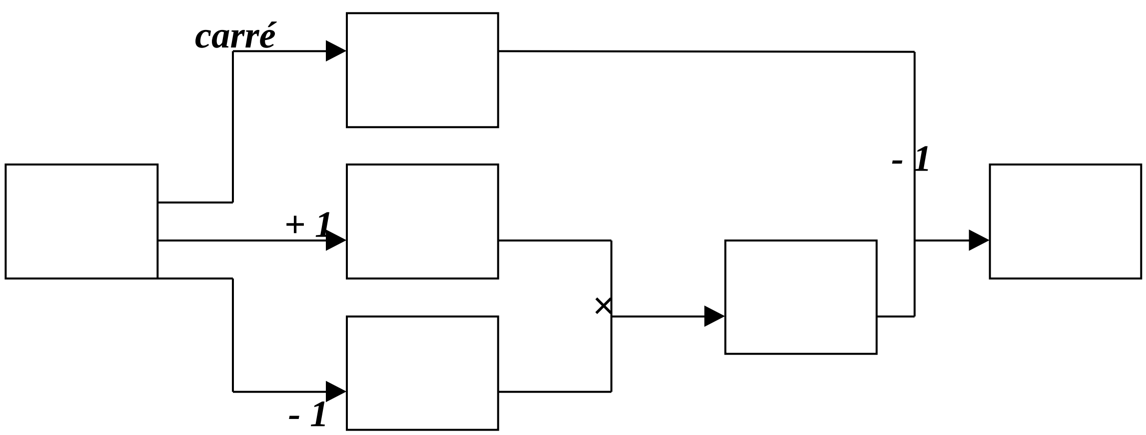
Exercice 1

On veut connaître le nombre de cubes nécessaires à la construction d'escaliers. Vérifier que les calculs proposés pour chaque escalier convient.
Envisager un mode de calcul (une "formule") qui permette de calculer le nombre total de cubes nécessaires pour la construction d'un escalier de taille quelconque.



Pour 3 marches	*Pour 4 marches*	*Pour 5 marches*	*Si on veut un escalier comptant un nombre quelconque n de marches.*
1 +2 + 3	*1 + 2 + 3 + 4*	*1 + 2 + 3 + 4 + 5*	
3 × 4 ÷ 2	*4 × 5 ÷ 2*	*5 × 6 ÷ 2*	
Expressions numériques			***Expressions littérales****: on dit que le nombre de cubes se calcule* ***en fonction*** *du nombre de marches n.*

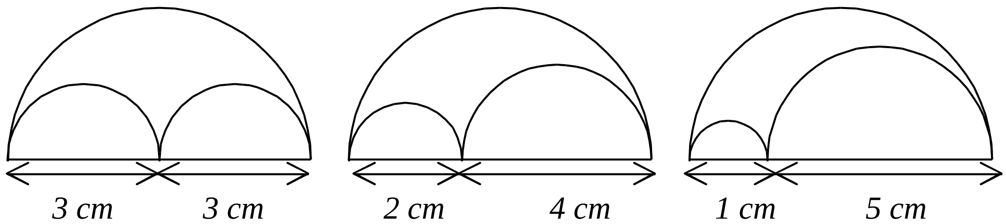
Exercice 2



Compléter au crayon les cases de gauche à droite en choisissant successivement différentes valeurs dans la case de départ.
Compléter enfin, après ces différents essais numériques, les cases en plaçant le nombre n dans la case initiale.

Exercice 3

Dans chacun de ces trois cas, comparer la longueur du grand arc de cercle à la somme des deux petits. (On exprimera ces longueurs en fonction de π , pas besoin de valeurs approchées).



Généralisation :

Comparer la longueur du grand arc de cercle à la somme des deux petits dans le cas général où le diamètre du grand arc est 6 cm, et où l'un des deux petits arc a pour diamètre x.

(On exprimera ces longueurs en fonction de π , pas besoin de valeurs approchées)

L'autre petit arc a donc pour diamètre : …………

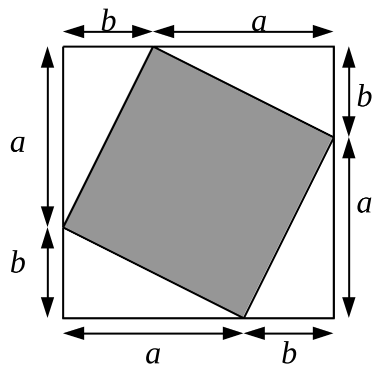
Exercice 4 : Les écritures algébriques de base :

Associer deux à deux (une expression algébrique et sa description).

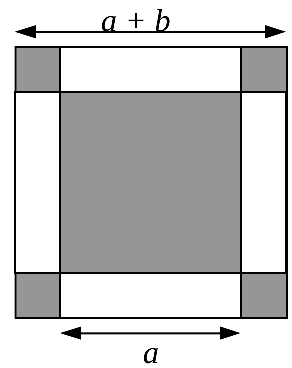
expression algébrique		*description*
x + y		*La somme*
*x_ - y_*		*Le produit*
*2(x + y)_*		*Le double produit*
*(x - y)_*		*Le carré de la somme*
xy		*La somme des carrés*
*(x + y)_*		*Le double du carré de la somme*
(x - y)(x + y)		*Le carré du double de la somme*
2xy		*Le carré de la différence*
*[2(x + y))_*		*La différence des carrés*
*x_ + y_*		*Le produit de la somme par la différence*

Exercice 5

Afin de les comparer, exprimer chacune des deux aires des zones grises :



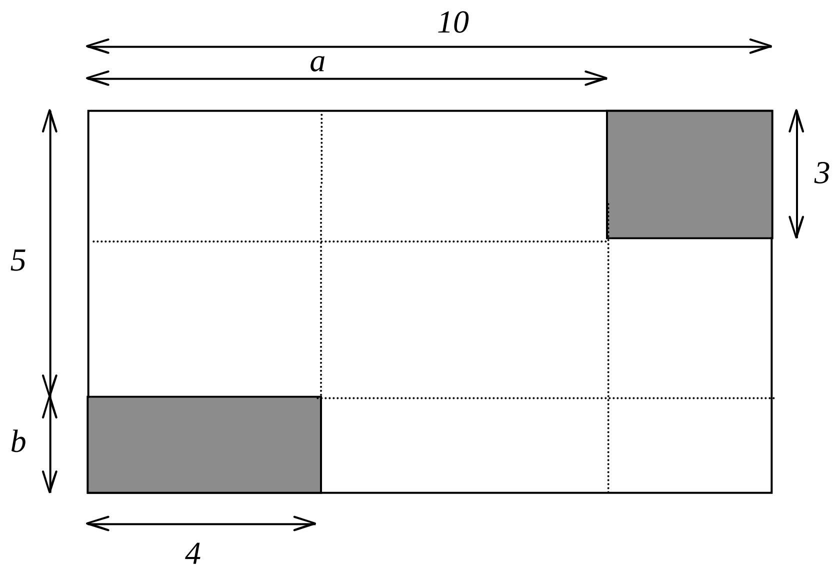
Penser à Pythagore



Déplacer les pièces.

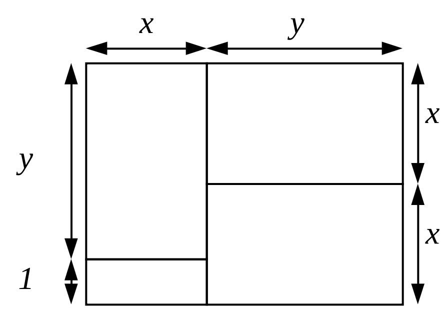
EXPRESSIONS EQUIVALENTES

Exercice 1



Exprimer l'aire de la partie non hachurée en fonction de a et de b :
- *Par soustraction des parties hachurées.*
- *Par découpage vertical*
- *Par découpage horizontal.*
- *En ajoutant les aires des sept rectangles blancs.*

Exercice 2



Chacune des expressions suivantes, sauf une, permettent de calculer l'aire de la figure ci-contre.

A_1 = (x + y)(y + 1)

A_2 = xy + xy + xy + x

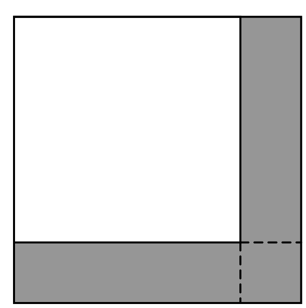
A_3 = x_(xy)

A_4 = x(1 + 3y)

A_5 = 2x(x + y)

a) Justifier chacune de ces expressions
b) Vérifier qu'elles sont toutes égales pour x = 3, sauf une.

Exercice 3



Un carré a pour côté x. On diminue le côté de 2, pour obtenir un carré plus petit.
Retrouver parmi les expressions suivantes la seule qui permette d'exprimer la diminution de l'aire.

A_1 = (x + 2)_ - x_

A_2 = x_ - (x - 2)_

A_3 = (x - 2)_ - x_

En partageant en trois la partie hachurée, montrer que cette diminution peut s'écrire :
A_4 = 4(x - 1). *En déduire la mesure x si la diminution est de 20 cm_.*

VOCABULAIRE DU CALCUL LITTERAL

Exercice 1 : Rappel des règles de priorité :

Les règles de priorité qui s'applique aux suites de calculs définissent l'ordre dans lequel ces calculs doivent être menés.

- *Les parenthèses ont toujours priorité sur les autres calculs.*

Quand le problème des parenthèses est réglé, on s'intéresse aux différentes opérations, à savoir dans l'ordre :

- *Les puissances*
- *Les produits et les quotients*
- *Les sommes et différences*

Par exemple, *dans le calcul de l'expression :* $8 - 3 \times 5^3 + (7 + 10)\_$

On calcule dans l'ordre $8 - 3 \times 5^3 + (7 + 10)\_ = 8 - 3 \times 125 + 17\_ = 8 - 375 + 289 = -78$

Calculer les expressions suivantes :

$A = 4 \times 5 + 7 - 6 \times 2 =$

$B = 9 + 6\_ \times (7 + 5) =$

$C = [(-\frac{1}{4}) + (-\frac{7}{8})] - (-\frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{4}{15}) =$

$D = (14 - 3 \times 5\_) + 6^3 \times 3 =$

$E = 11\_ - 7 \times 4 \times (13 + 8) =$

$F = \dfrac{1 - \frac{4}{7}}{1 + \frac{4}{7}} =$

$G = [(-\frac{1}{3}) + (+\frac{7}{9})] \times (-\frac{6}{5}) \times (-\frac{3}{2}) =$

$H = (-\frac{1}{10} + \frac{4}{3}) \times (\frac{2}{7} - \frac{4}{9}) =$

$J = \dfrac{-\frac{6}{5} - \frac{4}{7}}{\frac{11}{7} - \frac{3}{5}} =$

Exercice 2

S'agit il de produit ou de somme?
Mettre en évidence les différents termes dans le cas où il s'agit d'une somme, et les différents facteurs dans le cas de produits.

3,8 + 6 _ 0,2	*4,31 × 525 + 4,31 × 775*
6 × 25 × 2,25	*0,24 × 11 + 9,76 × 11 - 10 × 8,32*
7,9 - 1,2 _ 1,5	*24,3 × 18,5 - 14 × 18,5 + 18,5 × 19,7*
1,7 + 0,5 _ n	*(4 +2,7)_× 9*

Exercice 3

Les trois nombres : a , b et c sont supposés non nuls .
Pour les sept expressions suivantes , dire s'il s'agit d'une somme (et en préciser les différents termes) , ou s'il s'agit d'un produit (et en préciser les différents facteurs):

$ab + c$ $\quad$ $\frac{a}{b} \times c$ $\quad$ $a(b + c)$ $\quad$ $\frac{a}{b} + c$ $\quad$ $\frac{a + c}{b}$ $\quad$ $ab + ac$ $\quad$ *(a – b)_*

Exercice 4

Pour chaque expression, déterminer s'il s'agit d'une expression factorisée (un produit) ou d'une expression développée (une somme).
Dans le cas d'un produit, dresser la liste des facteurs.
Dans le cas d'une somme dresser la liste des termes.

Expression	*Produit / somme?*	*Termes ou facteurs :*
(2x + 3)(2x - 1)		
4x_ + 6x		
*(2x + 1)_*		
4x_ + 4x - 3		
4x_ × 4x + 1		
2x(2x + 3)		
(2x + 5)(x - 1) + 3		
(2x + 1)_ - 4		
4x_ × 6x		
$2x.\frac{1+x}{x-2}$		
$\frac{8}{3-2x} + 7x$		
(2x + 1)_ × 4x - 1		

REDUCTIONS D'ECRITURES

Développer, c'est supprimer toutes les parenthèses .
Réduire, c'est écrire l'expression sous la forme comportant le moins de termes .

Exemple

Développer et réduire l'expression :

$A = 3 - (a + 5 - b) + 2 - (3 - c)$:

Développer $A = 3 - a - 5 + b + 2 - 3 + c$ *(On supprime les parenthèses)*
Réduire $A = - a + b + c - 3$ *(On effectue les sommes possibles)*

Exercice 1:

Développer et réduire les expressions :

$A = a + (b - 5 + a) - (13 - a + b)$ $B = - 8 + a - b - (4 - b) + (a + b - 6)$

$C = a + (b - 5 - b) + a - 6 + 8 - a$ $D = - (a + b - 7) - b - (- 5 + a - b)$

$E = b - (4 - a - b - 6) + (2 - a + a - b)$ $F = 1 - (a - 9) + (3 + b) - (12 + a + b)$

Simplifier l'écriture d'un produit

Exemples

$A = 2ab^3 \times 3a\_b\_$ *peut s'écrire* $A = (2 \times 3) \times (a \times a\_) \times (b^3 \times b\_) = 6a^3 b^5$
$B = (4a^3b)^2$ *peut s'écrire* $B = 4a^3b \times 4a^3b = 16a^6b^2$
Pour la forme finale, on écrit en premier les facteurs numériques, puis les puissances dans l'ordre alphabétique.

Exercice 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = 3a\_b^3 \times 2ab\_$ $B = 4ab^3 \times 5a^4$ $C = 7a^3b \times 4b^7$
$D = - 4a\_bc \times 3ac\_$ $E = (-5a^3b) \times (-2a^3b\_c)$ $F = 4a^3c \times 2a\_bc^3$
$K = 3a\_b \times (4ab\_)\_$ $L = - 2ab\_ \times (-a\_b^3)^3$ $M = 3(a\_b^3)^2 \times 4(a^3b)^3$

Réduire l'écriture d'une somme

Exemples

Réduire l'écriture du nombre $A = 3x^4 + 4xy\_ + 5x\_ - 8xy + 2x\_ - 7y\_x$
Il faut chercher les termes semblables que l'on pourra additionner :
$5x\_ + 2x\_ = 7x\_$; $-7y\_x = -7xy\_$, *donc* $4xy\_ - 7xy\_ = - 3xy\_$
D'où l'écriture réduite de $\mathbf{A = 3x^4 - 3xy\_ + 7x\_ - 8xy}$

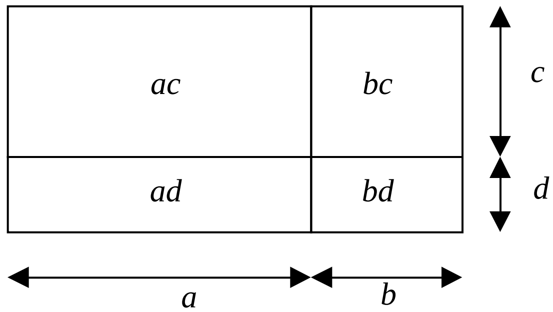
Exercice 3

Réduire l'écriture des nombres suivants :

$A = 2x\_ - 3 + 7x\_ - 4x + 3x - 4x\_$ $B = 9x^3 - 4x\_ + 9x\_ - 3x^3 + 8x$

$C = - 3b\_ + 4a\_ - 7a\_ + 9b\_ - 5a\_$ $D = 9a^2 - 4b\_ + 5a\_ - 7a^2 - 2b\_$

DEVELOPPER UN PRODUIT



L'aire du rectangle peut se calculer de deux manières : soit en considérant le rectangle de dimensions $(a + b)$ et $(c + d)$, soit en considérant les quatre petits rectangles le composant. On obtient alors deux expressions équivalentes qui généralisent la règle de distributivité à des produits dont les deux facteurs sont des sommes.

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

Pour développer ce produit de deux sommes, on multiplie chaque terme de la première par chaque terme de la deuxième.

Exercice 1 :

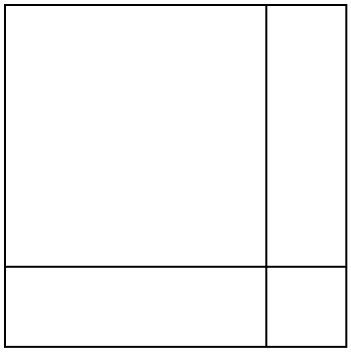
développer et réduire les expressions suivantes.

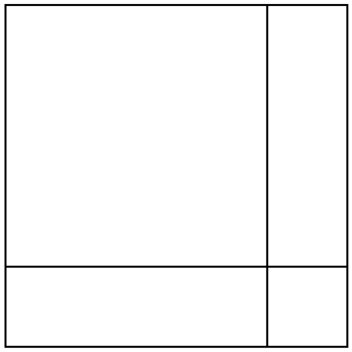
$(4a + 3)(3a + 5)$	$(3a - 2)(4a - 7)$	$(5a + 7)(4a + 1)$
$(- 3a + 2)(5a - 4)$	$(2b - 3)(2b - 7)$	$(3a - 4)(4a - 11)$
$(5b - 2)(- 3b + 2)$	$(3x - 4)(5x + 2)$	$(- 4x + 17)(- 3x - 21)$
$(5a - 3b)(4b + 3a)$	$(- a + 5b)(4b + 3a)$	$(2a - b)(- 7b + 4a)$

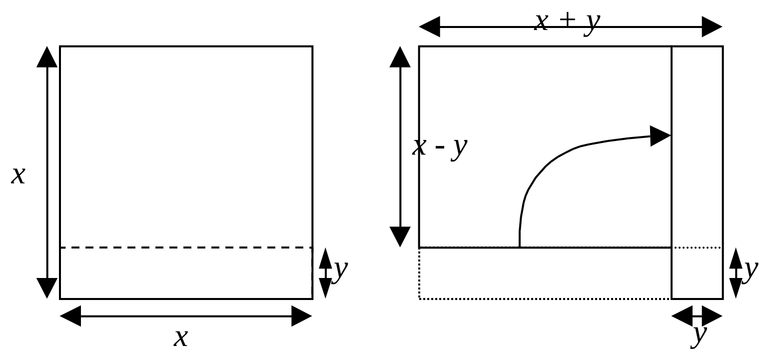
Développements remarquables :

Développer et réduire $(a + b)(a + b)$ et $(a - b)(a - b)$

Placer les longueurs a et b sur chacune des deux figures pour illustrer ces deux égalités remarquables.







Expliquer comment ces deux figures illustrent le développement du produit remarquable :
(x + y)(x - y).

Exercice 2

Développer et réduire les produits suivants :

$(3x + 1)^2$ $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$ $(-2x + 0,5)^2$ $\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)^2$

$(3x - 1)^2$ $(4x - 3)^2$ $(-7 + 5x)^2$ $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2$

$\left(\frac{x}{3} + 5\right)^2$ $(x - 4)(x + 4)$ $(2x + 1)(2x - 1)$ $\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{4}{5} - 2x\right)\left(\frac{4}{5} + 2x\right)$ $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right)^2$ $\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right)$ $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$

Exercice 3

Après avoir développé et réduit chacune de ces expressions, donner une vérification avec la valeur de votre choix.

$$A = \frac{3x^2 - 2}{5} + \frac{2x^3 + 7}{15} - \frac{5x^3 - 3}{20}$$

$$B = 7(x + 3) + (x + 2)(x - 4)$$

$$C = (3x - 4)(5x - 2) - 7(2x + 3) - (3 - 2x)^2$$

$$D = 5(2x + 3)(x - 4) - 3[3(x - 4) + x(x - 2)]$$

IDENTITES REMARQUABLES ET CALCULS DE CARRES.

Exercice 1 : Carrés consécutifs

Si n désigne un entier naturel, le nombre entier qui suit n est désigné par l'écriture (n + 1). On dit que n et (n + 1) sont deux entiers consécutifs.

1. *Donner une écriture simplifiée de la différence des carrés de deux entiers consécutifs.(le plus grand moins le plus petit)*
2. *Appliquer le* ***résultat précédent*** *pour calculer : (40_ - 39_), puis (135_ - 134_), (456_ - 455_) puis (7 564_ - 7 563_)*

Exercice 2 : Calculer le carré du prédécesseur et du suivant

1. *Sachant que le carré de 70 est égal à 4 900, montrer comment,* ***par cette méthode****, on peut connaître rapidement le carré de 71.*
2. *Sachant que le carré de 90 est égal à 8 100, montrer comment,* ***par cette méthode****, on peut connaître rapidement le carré de 89.*

Exercice 3 : carré des nombres se terminant par 5

1. *Nombres se terminant par 5*

- *Dans le nombre 45 que représente le nombre 4? Dans le nombre 85 que représente le nombre 8? Dans le nombre 295 que représente le nombre 29?*
- *Compléter 45 = …… × 10 + 5 85 = …… × 10 + 5 295 = …… × 10 + 5.*
- *Quelle est la forme générale que l'on peut en déduire pour tout nombre qui se termine par 5?*

2. *Carrés des nombres se terminant par 5.*

- *Calculer 45_, 55_, 75_, 85_, 105_. Quels sont les points communs à tous les résultats obtenus?*
- *Développer (10d + 5)_.*
- *Comment obtient-on le nombre de centaines du carré d'un nombre se terminant par 5?*

3. *Utilisation de la règle :*

- *Calculer de cette manière : 65_, 95_, 115_, 995_*

Exercice 4 : combiner les deux règles

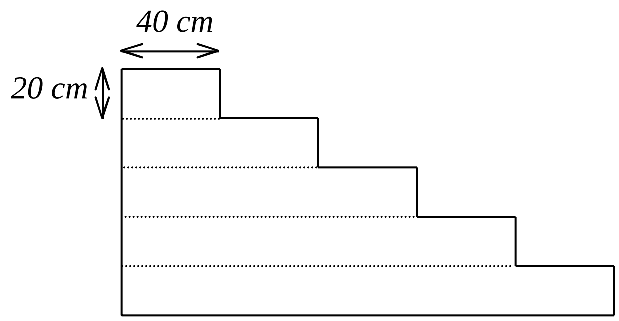
Montrer comment on peut combiner ces deux règles pour calculer de tête les nombres suivants :

36_, 54_, 96_, 104_.

FACTORISATIONS SIMPLES

Exercice 1

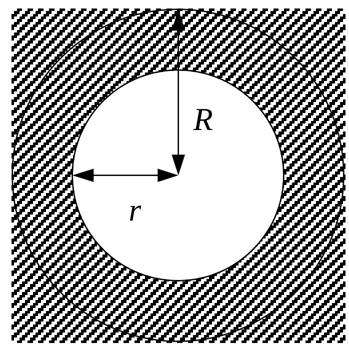
Cet escalier est constitué de 5 marches qui ont toutes la même hauteur 20 cm et la même largeur 40 cm.
Calculer l'aire de la partie visible sur le dessin de manière que le calcul nécessite le plus petit nombre possible d'opérations.



Exercice 2

Première partie

Pour calculer l'aire de la partie hachurée (que l'on appelle une couronne circulaire), on utilise la formule :
A = πR_ - πr_.

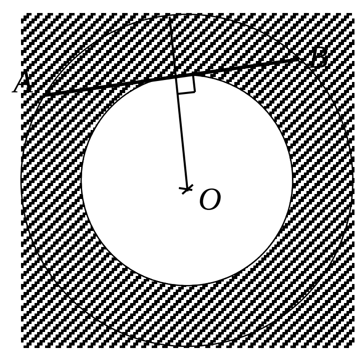


1. *Expliquer cette formule.*
2. *Factoriser cette expression.*
3. *Calculer cette aire en utilisant la formule factorisée lorsque R = 8,5 cm et r = 5,5 cm.*

Deuxième partie :

Calculer l'aire de la couronne sachant que AB = 10 cm.

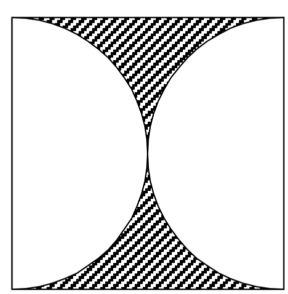
Exprimer l'aire de la couronne dans le cas général, en fonction de AB.



Exercice 3

Pour calculer l'aire de la partie hachurée, on utilise la formule : A = 4a_ - πa_.

1. *Que représente le nombre a?*
2. *Factoriser l'expression.*
3. *Calculer l'aire pour a = 5 cm.*



Exercice 4 : facteur commun du type ax^n

Factoriser un nombre ou une expression algébrique, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs
Pour factoriser, on utilise la règle de la distributivité ; **ab + ac = a(b + c).**
Dans cette égalité, il y a deux écritures différentes de la même expression.
Dans le premier membre, c'est une ***somme*** *(on dit que l'expression est* ***développée****)*
Dans le second membre, c'est un ***produit****, (on dit que l'expression est* ***factorisée****).*
Le facteur a, présent dans les deux produits ab et ac est appelé ***facteur commun****.*

Exemple :

$A = 36x^5 - 54x^3 + 90x^6$

1.Bien repérer les différents termes.(ici, il y en a trois)
2.Chercher le plus grand nombre divisant 36, 54 et 90 : c'est 18.
3.Chercher le plus petit exposant de x dans l'ensemble des trois termes. C'est 3.
4.Le facteur commun est donc : $\mathbf{18x^3}$
5.Factoriser chacun des termes :

$36x^5 = 18x^3 \times$ 2x_ $- 54x^3 = 18x^3 \times (- 3)$ $90x^6 = 18x^3 \times 5x^3$

6.On peut alors écrire la forme factorisée de A : **$18x^3$ (2x_ - 3 + $5x^3$)**

Exercice : Factoriser les expressions suivantes

$A = 60x - 24x + 36x$ $B = 42x^2 - 28x^2 + 70x^2$ $C = 7x^2 + 6x^2 - 6x$
D = 4 x_ - 3x   *E = 78x_ +* $54x^3 + 42x$ *F = 4x y - 3x y - 2x y*
G = 24x y_z + 56x y - $8x^2$ *y*

Exercice 5 : facteur commun du type (***ax + b***)

Exemple :

$B = (2x + 1)(5 - 2x) - 2(3 - 5x)(1 + 2x)$

Bien repérer les différents termes.(ici, il y en a deux)
Reconnaître les facteurs identiques : (2x + 1) et (1 + 2x) sont égaux.
Factoriser chacun des termes : $(2x + 1) \times (5 - 2x)$

$- 2(3 - 5x)(1 + 2x) = (2x + 1) \times [- 2(3 + 5x)]$

On peut alors écrire la forme factorisée de B : $(2x + 1)[(5 - 2x) - 2(3 + 5x)]$
On peut ensuite réduire l'expression dans les crochets :

$$B = (2x + 1)(5 - 2x - 6 - 10x) = \mathbf{(2x + 1)(- 12x - 1)}$$

Premier cas: le facteur commun est apparent :

$A = 3(x + 1)(7 - 2x) + (7 - 2x)(2 + x)$ $B = 2(3 - x)(x + 2) - 3(x + 2)(4 + x)$
$C = (2 - 3x)(6 + x) - 3(x - 1)(2 - 3x)$ $D = 3(4x - 2)(x + 7) + 5(x + 7)(3x - 1)$
$E = (2x - 3)(7 + 5x) - (2x - 3)$ $F = (3 - 2x)(5 - x) - (3 - 2x)(7 - 4x)$

Deuxième cas: il faut faire apparaître le facteur commun.

$A = (6 - 4x)(x + 5) + 2(3 - 2x)(x - 8)$
$B = (4x - 1) - 3x(8x - 2)$
$C = (5 - x)(2x - 1) + 2(2x + 1)(x - 5)$
D = (2x + 3)_ + 5(2x + 3)
E = 2 + (3x + 1)_ + 6x

Exercice 6 : Meilleure factorisation

Dans l'exercice 5, on a obtenu les factorisations suivantes :
D = (2x + 3)_ + 5(2x + 3) = (2x + 3)(2x + 8) et E = 2 + (3x + 1)_ + 6x = (3x + 1)(3x + 3)
Ces factorisations sont correctes, mais on peut donner d'autres formes factorisées qui sont souvent considérées comme meilleures que celles qui sont ici proposées.

Pour D, on peut remarquer que le facteur (2x + 8) peut s'écrire 2(x + 4). On a alors :
D = (2x + 3)[2(x + 4)] que l'on écrira en général : ***2(2x + 3)(x + 4)***

Pour E : 3x + 3 = 3(x + 1). On a alors E = ***3(3x + 1)(x + 1)***

De même, dans B de la première partie, on a obtenu : B = (x + 2)(-5x - 6).
On peut remarquer que : -5x - 6 = -(5x + 6) . B peut alors s'écrire : ***- (x + 2)(5x + 6)***

Dans toutes ces nouvelles factorisations, l'idée est, lorsque c'est possible, de factoriser "le plus possible", c'est à dire de rechercher dans chaque facteur d'éventuels facteurs communs afin que chacun des facteurs s'écrive avec les nombres les plus petits possible.

De la même manière , "améliorer" les formes factorisées suivantes :
(6x - 2)(5x + 7) *(4x + 8)(3x - 6)* *(2x - 1)(- 3x - 5).*

Exercice 7 : Tester l'exactitude d'une factorisation

Lorsqu'on a transformé l'écriture d'une expression littérale:
- choisir une valeur particulière pour la variable
- comparer les valeurs que prennent alors les différentes formes de l'expression.

Première partie
Voici des résultats de transformations d'écritures littérales. Sans refaire ces transformations, retrouver les égalités qui sont sûrement fausses.
2 (x - 1) - 2 (x + 1) - 4 (1 - x) = - 4 x - 8
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = -\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$
(x - 3)_ - 4 x_ = 9 (- x - 1) (x - 1)
(x - 2) _ + (2 x + 3)_ = 5 x_ + 13

Deuxième partie
Trois élèves ont fait la vérification de la transformation suivante:
(x - 1) (2x + 3) - (1 - x) (- x + 4) + x_ - 1 = (x - 1) (3x + 8)
Le premier vérifie en prenant x = 1 et en déduit que le résultat est correct.
Le deuxième prend x = 0 et en déduit aussi que le résultat est correct.
Le troisième prend x = 2 et en déduit que le résultat est faux.
Qui a raison?

SIMPLIFICATION DE FRACTIONS COMPORTANT DES LETTRES.

Exercice 1 :

Soit A l'expression en fonction de a définie par $A = \frac{4a\_ + a}{2a}$.

En attribuant une valeur au nombre a (par exemple a= 2), retrouver parmi les propositions suivantes celle qui peut être une forme simplifiée de A.

Les propositions sont : $A_1 = \frac{4a\_+1}{2}$ $\quad A_2 = 2a\_ + 1$ $\quad A_3 = \frac{2a+1}{2}$ $\quad A_4 = 2a$

Exercice 2 :

En utilisant les règles de calcul relatives aux fractions, transformer les expressions suivantes A, B et C , afin de retrouver leur forme simplifiée faisant partie de la liste proposée pour vérification. (on suppose que a ≠ - 1).

$A = \frac{a\_}{a + 1} - \frac{1}{a + 1}$ $\quad B = \frac{1}{a + 1} + \frac{2}{a\_ - 1}$ $\quad C = \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{a - 1} + \frac{2}{a\_ - 1}$

Les formes simplifiées doivent se trouver parmi : $(a - 1), \frac{1}{a - 1}, \frac{2}{a - 1}$

Exercice 3 :

Simplifier chacune des 5 fractions proposées, et dans chaque cas, donner une vérification en attribuant une valeur à x.

$A = \frac{4a\_ + 4}{2a}$ $\quad B = \frac{x\_ + x}{3x}$ $\quad C = \frac{x\_ + x}{2x + 2}$ $\quad D = \frac{x\_ + 4x + 4}{3x + 6}$

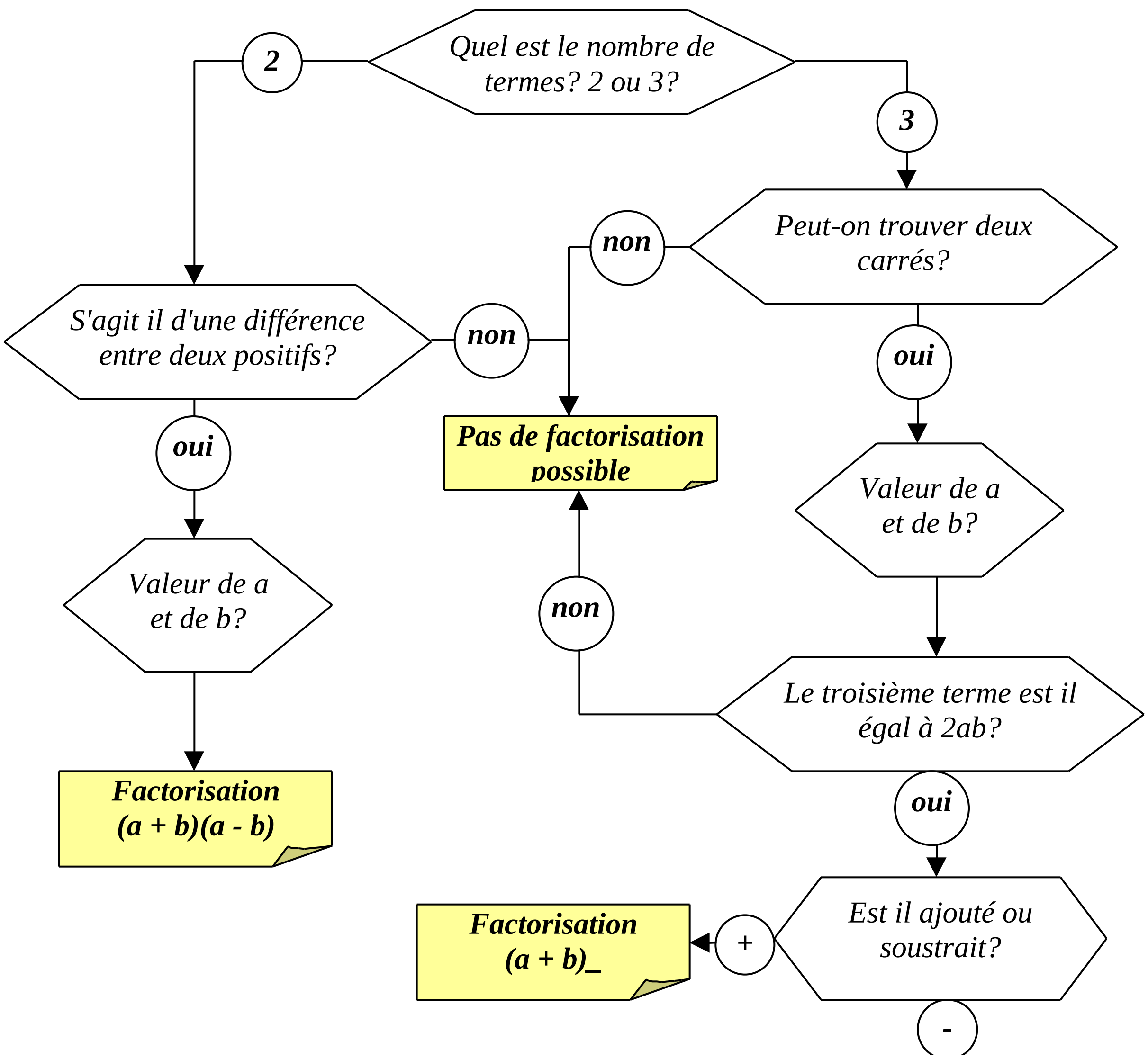
$E = \frac{4x + 8}{16}$

FACTORISER AVEC LES IDENTITES REMARQUABLES

Quand apparaissent des carrés dans les expressions que l'on souhaite factoriser, il n'est pas toujours possible d'utiliser la méthode classique de la distributivité directe par recherche du facteur commun.
On peut alors essayer d'utiliser les identités remarquables.

a_ + 2ab + b_ = (a + b)_ ❶
a_ - 2ab + b_ = (a - b)_ ❷
a_ - b_ = (a - b)(a + b) ❸

Il est d'abord essentiel de bien analyser la situation dans les formes développées.
Ce qui peut se schématiser ainsi :



Situations de base : reconnaître les formes développées classiques..

Expression	Les deux carrés	Le troisième terme est il le double produit?	Fact. ou pas?	Forme factorisée
x_ - 16				
x_ + 4 + 4x				
x_ + 3x + 9				
x_ - 6x + 12				
y_ - 8y + 16				
x_ + 25				
x_ - 8				
x_ - 2x + 1				
x_ + 2x - 1				
4a_ + 12a + 9				
9 + 25b_ - 30b				
- 9 + 16a_				
81a_ + 100				
36 - 25b_				

Situations complexes : deux étapes; problèmes de signes.

Développer les expressions suivantes :

(- a - b)_ =

(- a + b)_ =

(a - b)(- a - b) =

- (a + b)_ =

- (a - b)_ =

- (a + b)(a - b) =

Comparer :

2(a + b)_ et [2(a + b)]_

Exercice :

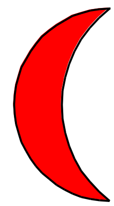
A = 2x_ - 8 B = 3x_ + 12x + 12 C = 12x - 2x_ - 18

D = (2x - 3)(x - 7) + (x_ - 14x + 49)

LUNULES D'HIPPOCRATE

Une lunule est un nom donné à une surface qui présente un aspect identique à la lune dans certaines de ses phases. Elle est délimitée par deux arcs de cercle, de centres et de rayons différents, les deux arcs étant courbés dans le même sens.

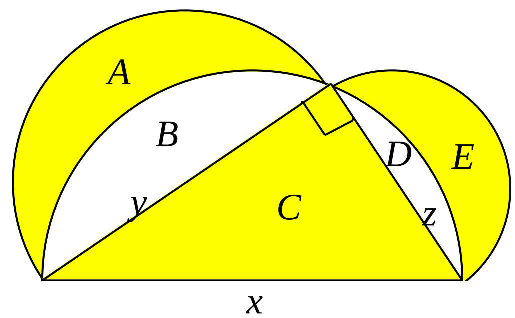
Comment peut-on retrouver les centres de ces deux arcs de cercle?



Exprimer l'aire d'un disque en fonction de son rayon R puis de son diamètre D.
Exprimer l'aire d'un demi - disque en fonction de son rayon R puis de son diamètre D.

Le triangle

Il faut montrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle rectangle.

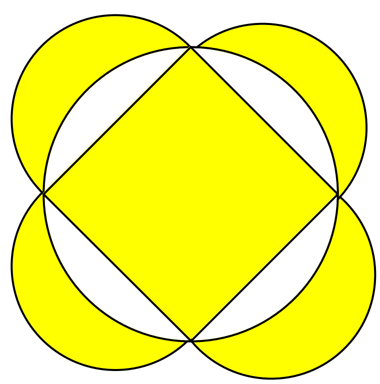


Chaque surface est désignée par une lettre (de A à E).
Les côtés du triangle sont désignés par les lettres x, y et z.

1. *Exprimer la somme (A + B) en fonction de y.*
2. *Exprimer la somme (D + E) en fonction de z.*
3. *Exprimer la somme (B + D + C) en fonction de x.*
4. *Montrer que : A + E = (A + B) + (D + E) - (B + D + C) + C.*
5. *En utilisant les "résultats" précédents, montrer que A + E = C.*

Le carré

Il faut montrer que la somme des aires des quatre lunules est égale à l'aire du carré.



LA LEÇON

1. Sommes et produits

*Une **somme** est le résultat d'une addition. Les nombres que l'on additionne s'appellent les **termes**. Suivant les cas, cette somme peut être réduite ou non.*
Par exemple :
12 + 17 est la somme des 2 termes 12 et 17 qui peut facilement se réduire au nombre 29.
$\frac{2}{3} + \frac{11}{4}$ *est la somme des 2 termes* $\frac{2}{3}$ *et* $\frac{11}{4}$ *, qui pourra être réduite à* $\frac{41}{12}$ *après un certain travail de transformation (réduction au même dénominateur).*
En revanche des sommes contenant des lettres ne sont pas toujours réductibles. La somme a + 2a se réduit à 3a, mais une somme comme 2a + 3b est irréductible.

Dans l'écriture d'une somme ne devrait apparaître que des signes + d'addition, mais par l'utilisation des relatifs, on considérera comme somme toute succession de termes précédés du signe + ou du signe - . On dira alors qu'il s'agit d'une somme algébrique.

*Un **produit** est le résultat d'une multiplication de plusieurs **facteurs**.*
De par la règle de la division (diviser = multiplier par l'inverse), on peut considérer comme produits des expressions où apparaissent des divisions.
Par exemple :
$\frac{3}{5}$ *peut être considéré comme le produit de 3 et de* $\frac{1}{5}$ *.*
$\frac{x\_}{1 - x}$ *peut être considéré comme le produit de trois facteurs : x (deux fois) et* $\frac{1}{1 - x}$

*Dans des expressions qui combinent additions et multiplications, ce sont les règles de **priorité** qui déterminent la nature de l'expression.*

2. Développer et Factoriser

*Une expression algébrique (littérale) peut être présentée sous **différentes formes**. Ce n'est alors que la présentation de cette expression qui change, non sa « valeur »*

***Développer** consiste à transformer une expression qui est sous forme de produit (ou qui contient des produits) en une expression écrite sous forme de somme algébrique.*
Par abus de langage, développer est souvent employé au sens de : supprimer les parenthèses.
***Factoriser** consiste, à l'inverse, à transformer une somme en produit.*

La propriété de la ***distributivité*** *du produit sur la somme permet ces transformations :*

k(a + b) = ka + kb	*(règle de base)*
(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd	*(règle générale)*

3. Identités remarquables

Certains produits particuliers qui sont très présents dans de nombreuses expressions offrent des formes particulières de développement. (c'est pourquoi on les remarque).
Mais surtout, il est utile d'en connaître les développements particuliers pour ensuite reconnaître dans les formes développées les factorisations possibles.
On appelle ***identités remarquables*** *les deux formes toujours égales de certaines de ces expressions. On en retiendra trois pour le moment :*

	Identités		
	factorisée		*développée*
Carré d'une somme	*(a + b)_*	=	*a_ + 2ab + b_*
Carré d'une différence	*(a - b)_*	=	*a_ - 2ab + b_*
Produit de la somme et de la différence	*(a + b)(a – b)*	=	*a_ - b_*
	|¾ *Développement* ¾→		
	←¾ *Factorisation* ¾¾|		

(a + b)_ est un produit remarquable.
a_ - 2ab + b_ est une somme remarquable.
(a + b)(a – b) = a_ - b_ est une identité remarquable.

EXERCICES

Exercice 1

1. *Calculer :* $5x - \frac{2}{3}$ *pour* $x = \frac{7}{3}$ $\quad$ $(-x + 3)(3x - 1)$ *pour* $x = -\frac{2}{3}$

   $-x^2 + 3x + 1$ *pour* $x = 3$ $\quad$ $3x^2 - 2x - 1$ *pour* $x = -\frac{2}{3}$.

2. *x désigne un nombre, réduire les écriture suivantes :*

   x + x $\qquad$ *4x _ (– 3x) _ 2x* $\qquad$ *2x² _ (– 3x) _ 4x² _ (– 5x)*

   $-2x^2 + 3x + 1{,}2 + x^2 - \frac{x}{3} + 8$ $\qquad$ $\frac{3x^2}{4} \leftrightarrow$ ¾ $\frac{2}{3}$ √ $\leftrightarrow \frac{x}{3}$

3. *x est un nombre, supprimer les parenthèses puis réduire les écritures :*

$A = 3x - (2x + 5)$ $\qquad$ $B = 4 + (-3x + 2)$ $\qquad$ $C = -2x - (-5x + 1) + 3$

$D = (x + 4) + (2x - 3)$ $\qquad$ $E = x - (2x - 3) + (x + 3)$ $\qquad$ $F = x - (-4x - (-x - 3))$

$G = 3(x - 1)$ $\qquad$ $H = -2x(4x - 3)$ $\qquad$ $I = (2x + 1)(3x - 2)$

$J = (-x + 1)(x - 2)$ $\qquad$ $K = (2x + 3)(2x - 3)$ $\qquad$ $L = x + 2(x - 1)$

$M = 2x - 3(x + 1)$ $\qquad$ $N = 2 + (x - 1)(2x - 3)$ $\qquad$ $P = 3(2x - 3) - 2x(x + 2)$

$Q = (x + 1)x - 3$ $\qquad$ $R = -3(x + 2) + (-x + 2)(x - 1)$

Exercice 2

Développer et réduire

a) $2x^2(x^2 + 5x + 9) - 2x^2 - 15x$ $\qquad$ b) $(x - 3)^2 - 3x(2x - 1)$

c) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)(2x - 1)$ $\qquad$ d) ¾ $3x + \frac{1}{2}$ √ $^2 - (x - 2)(2x - 1)$

e) ¾ $2x + \frac{1}{2}$ √ $\leftrightarrow 2 +$ ¾ $x - \frac{1}{3}$ √ ^{2} $\qquad$ f) $(x - 1)(2x + 3) -$ ¾ $x - \frac{1}{2}$ √ ^{2}

g) $(x + 6)^2 - 2(2x - 1)$ $\qquad$ h) $(5x + 2)^2 + (5x + 2)(5x - 1)$

i) $(3x + 4)(4 - 3x) + (2x + 1)(x - 2)$ $\qquad$ j) $(5 - 2x)(2x + 1) + (10 - 4x)(x - 3)$

k) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 + (3x + 1)(3x - 1)$

Exercice 3

1.Développer le produit (a + 1)(b + 1)

2.En utilisant la question précédente, résoudre le problème suivant :

On cherche trois nombres a, b et c. Pour les deux premiers, on calcule leur produit et leur somme; on ajoute ces deux nombres et on obtient 34. On fait de même pour les deux derniers et on obtient 14.

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

$A = x\_ - x + \frac{1}{4}$ $B = x\_ + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ $C = 9x\_ + 12x + 4$ $D = \frac{x\_}{4} - x + 1$

$E = \frac{x\_}{9} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ $F = \frac{25}{4}x\_ - x + \frac{1}{25}$ $G = 3x\_ - \frac{3}{4}$ $H = \frac{x\_}{2} - \frac{1}{8}$

$I = (x - 1)\_ + (3x - 3)((2x + 1)$ $J = (4x + 7)(5x + 2) + (10x + 4)(x + 5)$

$K = x\_ - 4 + (x + 2)(3x + 1)$

Exercice 5

Compléter chacune de ces sommes afin d'obtenir le développement d'un carré à préciser :

$A = x\_ + x + \ldots\ldots$ $B = 4a\_ - 4a + \ldots\ldots$ $C = 4x\_ - 20xy + \ldots\ldots\ldots$

$D = 1 - 2a \ldots\ldots\ldots$ $E = 9x\_ - 12xy \ldots\ldots$ $F = x\_ + \frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 6

Expliquer très précisément la première erreur trouvée dans chacun de ces calculs :

$2(x - 3)\_ = (2x - 6)\_ = 4x\_ - 24x + 36$

$(-3 - x)\_ = (-3)\_ + (-x)\_ - 2[-3 \times (-x)] = 9 + x\_ - 6x$

$(2x - 5)\_ = (2x - 5)(2x + 5) = 4x\_ - 25$

Exercice 7

1. Pour chacune des expressions suivantes, indiquer s'il s'agit d'une somme et énumérer ses termes, ou d'un produit et énumérer ses facteurs.

<u>ex</u>: 4a+3	*somme*	*ses termes sont **4a** et **3***
4(5-x)y		
7+5(x+2)		
3(2x+3)(x-5)		
(x+1)(x+2)+2x(x-1)		

2. Les sommes suivantes sont de la forme ka + kb ou ka - kb. Compléter le tableau.

Somme	*k*	*a*	*b*	*Factorisations*
4x_+5x				
12x_y+7y				
(5x-3)(2x-1)-5(2x-1)				
(x+3)_+(x+4)(x+3)				

Exercice 8

Simplifier les écritures des expressions suivantes :

$$A = -5a^2b \leftrightarrow \left(-2a^3b\right) \qquad B = -2y - \left(3y - 6x\right)$$

$$C = -\left(5y - x + 3\right) + 3\left(6x - 4\right) \qquad D = \frac{1}{3}\left(3a - 7\right) - \frac{1}{4}\left(8 - 4a\right)$$

Exercice 9

Développer les expressions :

$A(x) = (x + 3)\_ + (2x + 1)\_$

$B(x) = (2 - x)\_ + (4 + x)(4 - x)$

Factoriser les expressions :

$C(x) = (3x - 5)\_ - (1 - 2x)\_$

$D(x) = (4x - 3)(2 - x) + (9 - 12x)(10x + 9)$

$E(h) = \pi R\_h + \frac{2}{3}\pi R^3$.

Exercice 10

Développer et réduire

$x(2x + 1)$ $\quad 3x(- 2x + 2)$ $\quad 5x\_(x + 7)$ $\quad - \frac{4x}{3}(- 6x + 9)$

$3(2x + 1)(- x)$ $\quad (5x - 2)(2x + 3)$ $\quad (x - \frac{1}{2})(2x + 1)$ $\quad 5(2x - 8)(1 + 3x)$

$\frac{4x+1}{5}(3x + 2)$ $\quad (2y - 3)(4 - 5y)$ $\quad (\frac{4}{5} - 2x)(2x + \frac{4}{5})$

Exercice 11

Recopier et compléter le tableau

a	3x	$\frac{x}{2}$	-2x	$\_\frac{3}{2}$
b	1	2	$0,5$	$\frac{x}{3}$
$a\_$				
$2ab$				
$b\_$				

Compléter :

$(a + b)\_=$

$(a - b)\_=$

$(a + b)(a - b)=$

Exercice 12

Développer en utilisant les égalités remarquables

$(3x + 1)\_$ $\quad (\frac{x}{2} - 2)\_$ $\quad (- 2x + 0,5)\_$ $\quad (- \frac{3}{2} - \frac{x}{3})\_$

$(3x - 1)\_$ $\quad (4x - 3)\_$ $\quad (- 7 + 5x)\_$ $\quad (- 3x - \frac{1}{3})\_$

$(\frac{x}{3} + 5)\ \_$ $\quad (x - 4)(x + 4)$ $\quad (2x + 1)(2x - 1)$ $\quad (3x + \frac{1}{2})(3x - \frac{1}{2})$

$(\frac{4}{5} - 2x)\ (\frac{4}{5} + 2x)$ $\quad (\frac{2}{3}x + \frac{3}{5})\_$ $\quad (2x - \frac{1}{3})(2x + \frac{1}{3})$ $\quad (2x - \frac{3}{4})\_$

Exercice 13

Utilisation des identités remarquables.

Somme	a_	b_	2ab	Factorisons en écrivant sous la forme a_+b_±2ab
ex: 4x_+81+36x	(2x)_	(9)_	2× (2x)× (9)	4x_+81+36x = (2x)_+9_+2× 2x× 9 = (2x+9)_
25x_+70x+49				
25x_+9-30x				
9x_-24x+16				
ex: 4x_-25	(2x)_	(5)_		4x_-25 = (2x)_-5_ = **(2x-5)(2x+5)**
16-x_				
64x_-9				
(x-1)_-36				

Exercice 14

ex : x_-10x+25 *a_+b_-2ab* *x_-10x+25 = (x)_+(5)_-2× (x)× (5) =* ***(x-5)_***

8x_+32+32x

9x_+48x+64

4x_+36+24x

16x_-25

20x_-45

9x_-64

x_-8x+16

81x_-16x

(x+5)_+4(x+5)

Exercice 15

Lorsque le facteur commun se cache.

A = (2x-3)(x+1) -5(6x-9) *. Factoriser (6x-9) puis A.*

B = (16x_-1)-(4x-1)(x-3) *. Factoriser 16x_-1 puis B.*

C = 2x_-8 *. Mettre 2 en facteur, puis observer.*

*D = 12x-60x_+75*x^3*.* *. Mettre 3x en facteur, puis observer.*

E = 4x_-9 -(5x-4)(2x+3)

CORRIGES DES EXERCICES

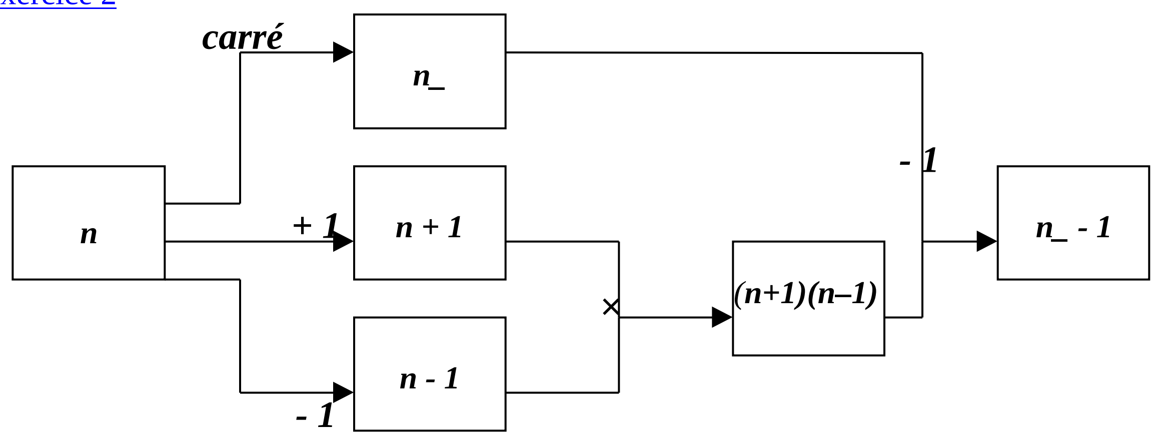
FICHES D'ACTIVITES

Utiliser des lettres

Exercice 1

Si on veut un escalier comptant un nombre quelconque n de marches.
1 + 2 + 3 + …… + n
n × (n + 1) ÷ 2
***Expressions littérales**: on dit que le nombre de cubes se calcule **en fonction** du nombre de marches n.*

Exercice 2



Exercice 3

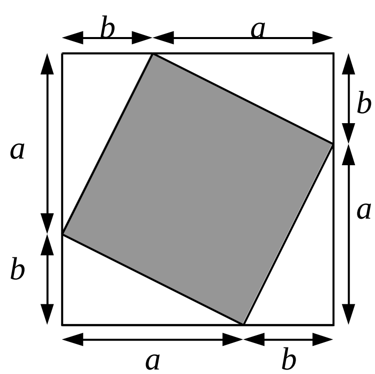
Diamètres des arcs	*Longueur du grand arc*	*Somme des deux petits arcs*
Grand : 6 cm *Petits : 3 cm et 3 cm*	$\frac{1}{2} \times \pi \times 6 = 3\pi$	$2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 3 = 3\pi$
Grand : 6 cm *Petits : 2 cm et 4 cm*	$\frac{1}{2} \times \pi \times 6 = 3\pi$	$\frac{1}{2} \times \pi \times 2 + \frac{1}{2} \times \pi \times 4 =$ $\pi + 2\pi = 3\pi$
Grand : 6 cm *Petits : 1 cm et 5 cm*	$\frac{1}{2} \times \pi \times 6 = 3\pi$	$\frac{1}{2} \times \pi \times 1 + \frac{1}{2} \times \pi \times 5 =$ $\frac{1}{2} \times \pi + \frac{5}{2} \times \pi = 3\pi$
Grand : 6 cm *Petits : x cm et (6 – x) cm*	$\frac{1}{2} \times \pi \times 6 = 3\pi$	$\frac{1}{2} \times \pi \times x + \frac{1}{2} \times \pi \times (6 - x) =$ $\frac{1}{2} \times \pi \times [x + 6 - x] = \frac{1}{2} \times 6 \times \pi = 3\pi$

Exercice 4

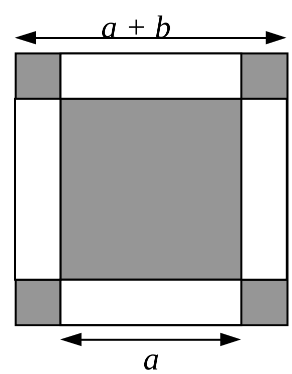
Les écritures associées :

expression algébrique	description
x + y	*La somme*
*x_ - y_*	*La différence des carrés*
*2(x + y)_*	*Le double du carré de la somme*
*(x - y)_*	*Le carré de la différence*
xy	*Le produit*
*(x + y)_*	*Le carré de la somme*
(x - y)(x + y)	*Le produit de la somme par la différence*
2xy	*Le double produit*
*[2(x + y))_*	*Le carré du double de la somme*
*x_ + y_*	*La somme des carrés*

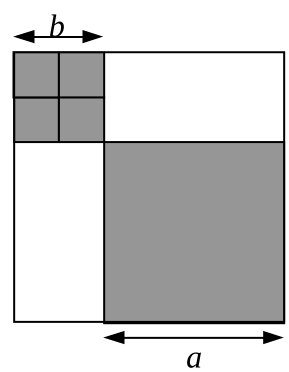
Exercice 5



Le côté du carré gris est aussi l'hypoténuse des triangles rectangles placés dans chacun des coins.
Par la relation de Pythagore, il apparaît que le carré de cette hypoténuse (qui est égale à l'aire du carré) est égale à ***a_ + b_***.



En déplaçant les carrés, on obtient cette situation où la partie grise est composée de deux carrés de côté a pour l'un et b pour l'autre. Son aire est donc ***a_ + b_***.



Expressions équivalentes

Exercice 1
Aire de la partie non hachurée en fonction de a et de b :
· *Par soustraction des parties hachurées.*
Aire totale : 10(5 + b)
Aires des parties hachurées : 3(10 – a) et 4b

· *Par découpage vertical*
Trois parties : 20 ; (a – 4)(5 + b) et (10 – a)(2 + b)

· *Par découpage horizontal.*
Trois bandes : 3a , 20 et 6b

· *En ajoutant les aires des sept rectangles blancs.*
12 + 3(a – 4) + 8 + 2(a – 4) + 2(10 – a) + b(a – 4) + b(10 – a)

Exercice 2
A_1 *= (x + y)(y + 1) : on multiplie la longueur totale par la largeur totale.*
A_2 *= xy + xy + xy + x : on ajoute les aires des quatre rectangles.*
A_3 *= x_(xy) :* ***Cette formule ne convient pas****.*
A_4 *= x(1 + 3y) : On déplace les quatre morceaux pour former un nouveau rectangle ayant pour largeur unique la longueur x.*
A_5 *= 2x(x + y) : on multiplie la longueur totale par la largeur totale*

Pour x = 3, alors y = 5 et $A_1 = A_2 = A_4 = A_5$ *= 48 cm_.*
Alors que A_3 *= 3_ × 3 × 5 = 135 (l'unité étant plus problématique).*

Exercice 3
A_2 *= x_ - (x - 2)_ est la seule expression qui convient. A l'aire initiale, on retire l'aire finale, et ainsi on obtient la diminution.*
La partie hachurée est constituée de deux rectangles d'aire 2(x – 1) et d'un carré d'aire 4.
L'aire hachurée est donc égale à 2[2(x – 2)] + 4 = 4(x – 2) + 4 = 4x – 8 + 4 = 4x – 4 qui peut s'écrire encore A_4 *= 4(x - 1).*
Si la diminution est de 20 cm_, alors 4(x - 1) = 20 , d'où x – 1 = 5 et ***x = 6 cm****.*

Vocabulaire du calcul littéral

Exercice 1
A = 4 × 5 + 7 - 6 × 2 = 20 + 7 – 12 = 15
B = 9 + 6_ × (7 + 5) = 9 + 36 × 12 = 9 + 432 = 441
$C = [(- \frac{1}{4}) + (- \frac{7}{8})] – (- \frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{4}{15}) = - \frac{9}{8} - \frac{8}{15} = - \frac{199}{120}$
D = (14 - 3 × 5_) + 6^3 *× 3 = (14 - 3 × 25) + 216× 3 = (14 – 75) + 648 = - 61 + 648 = 587*
E = 11_ - 7 × 4 × (13 + 8) = 121 - 28 × 21 = 121 – 588 = - 467
$$F = \frac{1 - \frac{4}{7}}{1 + \frac{4}{7}} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{11}{7}} = \frac{3}{11}$$

$G = [(- \frac{1}{3}) + (+ \frac{7}{9})] \times (- \frac{6}{5}) \times (- \frac{3}{2}) = \frac{4}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$

$H = (- \frac{1}{10} + \frac{4}{3}) \times (\frac{2}{7} - \frac{4}{9}) = \frac{37}{30} \times (- \frac{10}{63}) = - \frac{37}{189}$

$J = \dfrac{- \frac{6}{5} - \frac{4}{7}}{\frac{11}{7} - \frac{3}{5}} = \dfrac{- \frac{62}{35}}{\frac{34}{35}} = - \frac{31}{17}$

Exercice 2

- *3,8 + 6 _ 0,2 : somme de deux termes : 3,8 et 6 _ 0,2*
- *4,31 × 525 + 4,31 × 775 : somme deux termes4,31 × 525 et 4,31 × 775*
- *6 × 25 × 2,25 : produit de trois facteurs : 6 et 25 et 2,25*
- *0,24 × 11 + 9,76 × 11 - 10 × 8,32 : somme de trois termes :0,24 × 11 et 9,76 × 11 et - 10 × 8,32*
- *7,9 - 1,2 _ 1,5 : somme de deux termes : 7,9 et 1,2 _ 1,5*
- *24,3 × 18,5 - 14 × 18,5 + 18,5 × 19,7 : somme de trois termes : 24,3 × 18,5 et - 14 × 18,5 et 18,5 × 19,7*
- *1,7 + 0,5 _ n : somme de deux termes : 1,7 et 0,5 _ n*
- *(4 +2,7)_× 9 : produit de trois facteurs : deux fois le facteur (4 +2,7) car il est au carré et le facteur 9 :*

Exercice 3

ab + c est la somme de ab et de c

$\frac{a}{b} \times c$ *est le produit de* $\frac{a}{b}$ *par c.*

a(b + c) est le produit de a et de (a + b)

$\frac{a}{b} + c$ *est la somme de* $\frac{a}{b}$ *et c.*

$\frac{a + c}{b}$ *peut être considéré comme le produit de (a + c) et de l'inverse de b.*
ab + ac est la somme des produits ab et ac.
(a – b)_ est un produit : c'est le carré de (a – b)

Exercice 4

Expression	Produit / somme?	Termes ou facteurs :
(2x + 3)(2x - 1)	Produit	2 facteurs : (2x + 3) et (2x - 1)
4x_ + 6x	somme	2 termes : 4x_ et 6x
(2x + 1)_	Produit	2 facteurs : (2x + 1) répété deux fois (carré)
4x_ + 4x - 3	somme	3 termes : 4x_ ; 4x et - 3
4x_ × 4x + 1	somme	2 termes : 4x_ × 4x et 1
2x(2x + 3)	Produit	3 facteurs : 2 ; x ; et (2x + 3)
(2x + 5)(x - 1) + 3	somme	2 termes : (2x + 5)(x - 1) et 3
(2x + 1)_ - 4	somme	2 termes : (2x + 1)_ et - 4
4x_ × 6x	Produit	Le nombre de facteurs peut être discuté : On peut considérer qu'il y en a deux : 4x_ et 6x Ou bien qu'il y en a quatre : 4 ; x_ ; 6 ; et x Ou encore 5 : : 4 ; x répété deux fois ; 6 ; et x
$2x.\frac{1+x}{x-2}$	Produit	2 ou 3 facteurs : 2x et . $\frac{1+x}{x-2}$ ou bien 2x ; 1 + x et l'inverse de x - 2

$\frac{8}{3-2x} + 7x$	*somme*	*2 termes :* $\frac{8}{3-2x}$ *et* $7x$
(2x + 1)_ × 4x - 1	*somme*	*2 termes : (2x + 1)_ × 4x et - 1*

Réductions d'écritures

Exercice 1

A = a + (b - 5 + a) - (13 - a + b) = ***3a - 18***

B = - 8 + a - b - (4 - b) + (a + b - 6) = ***2a + b - 18***

C = a + (b - 5 - b) + a - 6 + 8 – a = ***a - 3***

D = - (a + b - 7) - b - (- 5 + a - b) = ***- 2a – b + 12***

E = b - (4- a - b- 6) + (2 - a + a - b) = ***a + b + 4***

F = 1 - (a - 9) + (3 + b) - (12 + a + b) = ***- 2a + 1***

Exercice 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

A = 3a_b^3 × 2ab_ = ***6a^3 b^5***

B = 4ab^3 × 5a^4 = ***20a^{5}b^3***

C = 7a^{3}b × 4b^7 = ***28a^3 b^8***

D = - 4a_bc × 3ac_ = ***- 12a^3 bc^3***

E = (-5a^{3}b) × (-2a^{3}b_c) = ***10a^{6}b^3 c***

F = 4a^{3}c × 2a_bc^3 = ***8a^{5}bc^5***

K = 3a_b × (4ab_)_ = ***48a^{4}b^5***

L = - 2ab_ × (- a_b^3)^3 = ***2a^{7}b^{11}***

M = 3(a_b^3)^2 × 4(a^{3}b)^3 = ***12a^{13}b^9***

Exercice 3

A = 2x_ - 3 + 7x_ - 4x + 3x - 4x_ = ***5x_ - x - 3***

B = 9x^3 - 4x_ + 9x_ - 3x^3 + 8x = ***6x^3 + 5x_ + 8x***

C = - 3b_ + 4a_ - 7a_ + 9b_ - 5a_ = ***- 8a_ + 6b_***.

D = 9a^2 - 4b_ + 5a_ - 7a^2 - 2b_ = ***7a_ - 6b_***.

Développer un produit

Exercice 1

(4a + 3)(3a + 5) = 12a_ + 29a + 15

(3a - 2)(4a - 7) = 12a_ - 29a + 14

(5a + 7)(4a + 1) = 20a_ + 33a + 7

(- 3a + 2)(5a - 4) = - 15a_ + 22a - 8

(2b - 3)(2b - 7) = 4b_ - 20b + 21

(3a - 4)(4a - 11) = 12a_ - 49a + 44

(5b - 2)(- 3b + 2) = - 15b_ + 16b – 4

(3x - 4)(5x + 2) = 15x_ - 14x - 8

(- 4x + 17)(- 3x - 21) = 12x_ + 33x - 357

(5a - 3b)(4b + 3a) =15a_ - 12b_ + 11ab

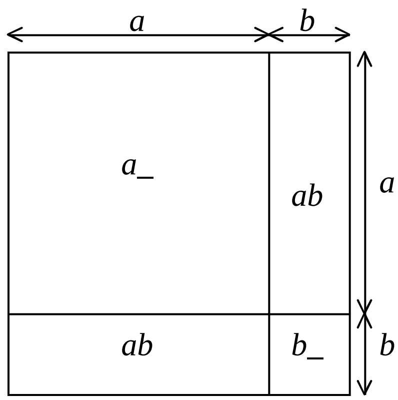
(- a + 5b)(4b + 3a) = - 3a_ + 20b_ + 11ab

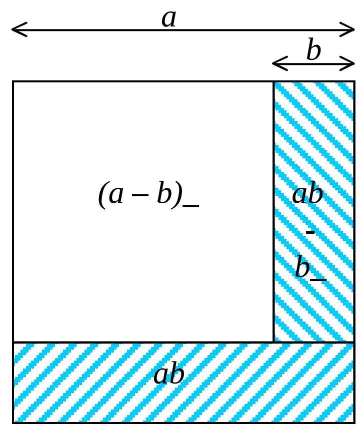
(2a - b)(- 7b + 4a) = 8a_ + 7b_ - 18ab

Développements remarquables

*(a + b)(a + b) = a_ + 2ab + b_ et (a - b)(a - b) = a_ - 2ab + b_*

Placer les longueurs a et b sur chacune des deux figures pour illustrer ces deux égalités remarquables.





Exercice 2

(3x + 1)_ = 9x_ + 6x + 1

$\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = \frac{x\_}{4} - 2x + 4$

(-2x + 0,5)_ = 4x_ - 2x + 0,25

$\left(-\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x\_}{9} + x + \frac{9}{4}$

(3x - 1)_ = 9x_ - 6x + 1

(4x - 3)_ = 16x_ - 24x + 9

(-7 + 5x)_ = 25x_ - 70x + 49

$\left(-3x - \frac{1}{3}\right)^2 = 9x\_ + 2x + \frac{1}{9}$

$\left(\frac{x}{3} + 5\right)^2 = \frac{x\_}{9} + \frac{10x}{3} + 25$

(x - 4)(x + 4) = x_ - 16

(2x + 1)(2x - 1) = 4x_ - 1

$\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right) = 9x\_ - \frac{1}{4}$

$\left(\frac{4}{5} - 2x\right)\left(\frac{4}{5} + 2x\right) = \frac{16}{25} - 4x\_$

$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{9}x\_ + \frac{4}{5}x + \frac{9}{25}$

$\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4x\_ - \frac{1}{9}$

$\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 = 4x\_ - 3x + \frac{9}{16}$

Exercice 3

$A = \frac{3x? - 2}{5} + \frac{2x^3 + 7}{15} - \frac{5x^3 - 3}{20} = \frac{12(3x\_ - 2)}{60} + \frac{4(2x^3 + 7)}{60} - \frac{3(5x^3 - 3)}{60} =$

$\frac{36x\_ - 2 + 8x^3 + 28 - 15x^3 + 9}{60} = \frac{\mathbf{-7x^3 + 36x\_ + 35}}{\mathbf{60}}$

$B = 7(x+3) + (x+2)(x-4)$ = 7x + 21 + x_ - 4x + 2x – 8 = **x_ + 5x + 13**

$C = (3x-4)(5x-2) - 7(2x+3) - (3-2x)?$ =

15x_ - 6x – 20x + 8 – 14x – 21 – 9 + 12x – 4x_ = **11x_ - 28x - 22**

$D = 5(2x+3)(x-4) - 3[3(x-4) + x(x-2)]$ =

5(2x_ - 8x + 3x – 12) – 3(3x – 12 + x_ - 2x) =

10x_ - 25x – 60 – 3x_ - 3x + 36 = **7x_ - 28x – 24**

Calculs de carrés

Exercice 1

Si n désigne un entier naturel, le nombre entier qui suit n est désigné par l'écriture (n + 1). On dit que n et (n + 1) sont deux entiers consécutifs.

1. La différence des carrés de deux entiers consécutifs :
   (n + 1)_ - n_ = n_ + 2n + 1 – n_ = 2n + 1
2. 40_ - 39_ = 2 × 39 + 1 = **79**   135_ - 134_ = 2 × 134 + 1 = **269**
   (456_ - 455_) = 2 × 455 + 1 = **911**   (7 564_ - 7 563_) = 2 × 7 563 + 1 = **15 127**

Exercice 2

1. 71_ - 70_ = 2 × 70 + 1 = 141 ; et comme 70_ = 4 900, alors 71_ = 4 900 + 141 = **5 041**
2. 90_ - 89_ = 2 × 89 + 1 = 179, donc 89_ = 8 100 – 179 = **7 921**

Exercice 3

1. Nombres se terminant par 5

- Dans le nombre 45, le nombre 4représente le chiffre des dizaines ou le nombre de dizaines. Dans le nombre 85, le nombre 8 représente le chiffre des dizaines ou le nombre de dizaines. Dans le nombre 295 le nombre 29 représente le nombre de dizaines.
- 45 = **4** × 10 + 5   85 = **8** × 10 + 5   295 = **29** × 10 + 5.
- Un nombre qui se termine par 5 s'écrit sous la forme : **d × 10 + 5** où représente le nombre de dizaines.

2. Carrés des nombres se terminant par 5.

- 45_ = 2 025   55_ = 3 025   75_ = 5 625   85_ = 5 625   105_ = 11 025. Tous les résultats obtenus se terminent par 25. Il suffit donc d'en retrouver le nombre de centaines pour connaître ce nombre.
- (10d + 5)_ =100d_ + 100d + 25 = 100(d_ + d) + 25. Le nombre de centaines est donc égal à (d_ + d) qui se factorise sous la forme d(d + 1).
- Le nombre de centaines du carré d'un nombre se terminant par 5 s'obtient en multipliant le nombre d de dizaines du nombre initial par le nombre successeur de d.

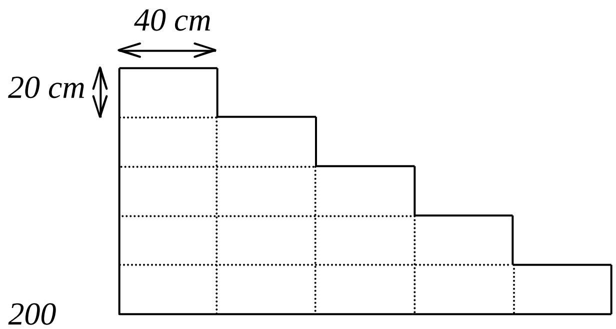
3. Utilisation de la règle :

- 65_ = 6 × 7 × 100 + 25 = 42 × 100 + 25 = 4 200 + 25 = 4 225
- 95_ = 9 × 10 × 100 + 25 = 9 025
- 115_ = 11 × 12 × 100 + 25 = 13 225   995_ = 99 × 100 × 100 + 25 = 990 025

Exercice 4

Pour calculer 36_, on calcule 35_, puis on en déduit 36_ :
35_ = 1 225, donc 36_ = 1 225 + 71 = 1 296
Pour 54_ : 55_ = 3 025, donc 54_ = 3 025 – 109 = 2 916
96_ = 95_ + 2 × 95 + 1 = 9 025 + 190 + 1 = 9 216
104_ = 105_ - (2 × 104 + 1) = 11 025 – 209 = 10 816

Factorisations simples



Exercice 1

Il y a différentes manières de calculer l'aire de la partie visible :
On peut compter marche par marche en partant du haut :
20 × 40 + 20 × 80 + 20 × 120 + 20 × 160 + 20 × 200
On peut découper les marches pour les placer "en enfilade" afin d'obtenir un long rectangle de 20 cm de large : 20 × (40 + 80 + 120 + 160 + 200)
On peut enfin, et c'est le calcul le plus simple, découper chaque marche en "morceaux" rectangulaires de 20 sur 40, et compter les morceaux :
20 × 40 × (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 800 × 15 = 12 000 cm_ = 120 dm_ = 1,2 m_.

Résumons :
20 × 40 + 20 × 80 + 20 × 120 + 20 × 160 + 20 × 200
On a mis 20 en facteur
20 × (40 + 80 + 120 + 160 + 200)
On a mis 40 en facteur
20 × 40 × (1 + 2 + 3 + 4 + 5)

Exercice 2

Première partie

A = πR_ - πr_.

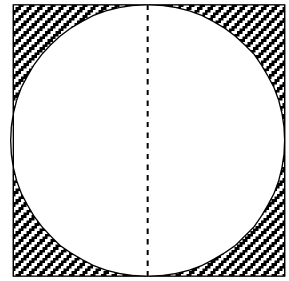
1. *L'aire de la couronne : aire du disque de rayon R (π R_) à laquelle on retire l'aire du disque de rayon r (π r_). Donc A = πR_ - πr_.*
2. *Factorisation : A = πR_ - πr_ = π (R_ - r_)*
3. *Si R = 8,5 cm et r = 5,5 cm, alors A = π (R_ - r_) = π × (8,5_ × 5,5_) = π × (72,25 - 30,25).*
4. *Donc A = π × 42 que l'on écrit en général 42π.*
5. *Dans ce cas, on dit que l'aire est exprimée* ***en fonction de π.***
6. *Si l'on souhaite connaître une valeur approchée de cette aire, on choisira pour π une valeur approchée telle que 3 ou bien 3,1 ou 3,14 ,etc. selon la précision souhaitée.*

Deuxième partie :

L'aire de la couronne est donnée par la formule vue ci dessus : A = π (R_ - r_).
Il suffit donc de connaître la valeur de R_ - r_ pour pouvoir connaître l'aire.
Soit I le milieu de [AB]. OIB est rectangle en I. On peut donc y appliquer la relation de Pythagore : OB_ = OI_ + BI_, d'où : OB_ - OI_ = BI_.
Si AB = 10 cm : OB = R; OI = r et BI = $\frac{1}{2}$ *× AB = 5 cm. Donc R_ - r_ = 5_ = 25.*
Conclusion : A = 25 cm_.

Sinon, en fonction de AB : R_ - r_ = $\left(\frac{AB}{2}\right)$_ = $\frac{AB\_}{4}$ *Conclusion : A =* $\frac{AB\_}{4}$ *cm_.*

Exercice 3



Pour calculer l'aire de la partie hachurée, on utilise la formule : A = 4a_ - πa_.

1. *Par déplacement des deux demi disques, on peut obtenir la situation représentée ci contre.*

*L'aire de la partie hachurée = aire du carré - aire du disque A = 4a_ - π a_*

a est donc le rayon du disque, et le côté du carré est 2a.

2. *Factorisation : A = (4 - π)a_. L'aire est exprimée en fonction de π .*
3. *Pour a = 5 cm, A = (4 - π)× 5_ = 25(4 - π) que l'on peut écrire aussi 100 - 25π*
   Dans ce cas, on dit que l'aire est exprimée ***<u>en fonction de π.</u>***
   Si l'on souhaite connaître une valeur approchée de cette aire, on choisira pour π une valeur approchée telle que 3 ou bien 3,1 ou 3,14 ,etc. selon la précision souhaitée.

Exercice 4

<u>Exercice : Factoriser les expressions suivantes</u>

A = 60x - 24x + 36x = (60 - 24 + 36)x = ***<u>72x</u>*** *(on compte les x)*
B = 42x^2 - 28x^2 + 70x^2 = (42 - 28 + 70)x_ = ***<u>84x_</u>*** *(on compte les x_)*
C = 7x^2 + 6x^2 -6x = 13x_ - 6x = ***<u>x(13x - 6)</u>***
D = 4 x_ - 3x = ***<u>x(4x - 3)</u>***
E = 78x_ + 54x^3 + 42x = ***<u>6x(13x + 9x_ + 7)</u>***
F = 4x y - 3x y - 2x y = (4 - 3 - 2)xy = - 1x = ***<u>- xy</u>***
G = 24x y_z + 56x y - 8x^2 y = ***<u>8xy(3yz + 7 - x)</u>***

Exercice 5

<u>Premier cas: le facteur commun est apparent :</u>

A = 3(x + 1)(7 - 2x) + (7 - 2x)(2 + x) = (7x - 2) [3(x + 1) + (2 + x)] = ***<u>(7x - 2) (4x + 5)</u>***
B = 2(3 - x)(x + 2) - 3(x + 2)(4 + x) = (x + 2)[2(3 - x) - 3(4 + x)] = (x + 2)(6 - 2x - 12 - 3x) = ***<u>(x + 2)(- 5x - 6)</u>****.*
C = (2 - 3x)(6 + x) - 3(x - 1)(2 - 3x) = (2 - 3x)[(6 + x) - 3(x - 1)] = ***<u>(2 - 3x)(- 2x + 9)</u>***
D = 3(4x - 2)(x + 7) + 5(x + 7)(3x - 1) = (x + 7)[3(4x - 2) + 5(3x - 1)] = ***<u>(x + 7)(27x - 11)</u>***
E = (2x - 3)(7 + 5x) - (2x - 3) = (2x - 3)(7 + 5x - 1) = ***<u>(2x - 3)(5x + 6)</u>***
F = (3 - 2x)(5 -x) - (3 - 2x)(7 - 4x) = (3 - 2x)[(5 - x) - (7 - 4x)] = ***<u>(3 - 2x)(3x - 2).</u>***

<u>Deuxième cas: il faut faire apparaître le facteur commun.</u>

A = (6 - 4x)(x + 5) + 2(3 - 2x)(x - 8).
On remarque que : (6 - 4x) = 2(3 - 2x). Donc A = 2(3 - 2x)(x + 5) + 2(3 - 2x)(x - 8).
A = 2(3 - 2x)[(x + 5) + (x - 8)] = ***<u>2(3 - 2x)(2x - 3)</u>***
B = (4x - 1) -3x(8x - 2)
On remarque : (8x - 2) = 2(4x - 1). Donc B = (4x - 1) -3x × 2(4x - 1) = (4x - 1) - 6x(4x - 1)
B = ***<u>(4x - 1)(1 - 6x)</u>****.*
C = (5 - x)(2x - 1) + 2(2x + 1)(x - 5)
5 - x = - (x - 5). Donc C = - (x - 5)(2x - 1) + 2(2x + 1)(x - 5)
C = (x - 5)[-(2x - 1) +2(2x + 1)] = (x - 5)(- 2x + 1 + 4x + 2) = ***<u>(x - 5)(2x + 3)</u>***
D = (2x + 3)_ + 5(2x + 3)
(2x + 3)_ = (2x + 3)(2x + 3). Donc D = (2x + 3)(2x + 3). + 5(2x + 3)

$D = (2x + 3)[(2x + 3) + 5] = \underline{\mathbf{(2x + 3)(2x + 8)}}$

$E = 2 + (3x + 1)\_ + 6x =$
On remarque : $6x + 2 = 2(3x + 1)$. *Donc* $E = (3x + 1)\_ + 2(3x + 1)$
$E = (3x + 1)\ (3x + 1 + 2) = \underline{\mathbf{(3x + 1)(3x + 3)}}$

Exercice 6

$(6x - 2)(5x + 7) = \underline{\mathbf{2(3x - 1)(5x + 7)}}$
$(4x + 8)(3x - 6) = 4(x + 2) \times 3(x - 2) = \underline{\mathbf{12(x + 2)(x - 2)}}$
$(2x - 1)(- 3x - 5).= -(2x - 1)(3x + 5)$ *ou* $\underline{\mathbf{(1 - 2x)(3x + 5)}}$

Exercice 7

Première partie

En attribuant la valeur 2 au nombre x : on obtient :

Expression 1	*pour x = 2*	*Expression 2*	*pour x = 2*	*Conclusion*
$2(x - 1) - 2(x + 1) - 4(1 - x)$	0	$- 4x - 8$	$- 16$	*Égalité fausse*
$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{(x-1)(x+1)}$	$\frac{2}{3}$	*Égalité peut-être exacte*
$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$	$\frac{1}{3}$	$- \frac{1}{(x-1)(x+1)}$	$- \frac{1}{3}$	*Égalité fausse*
$(x - 3)^3 - 4x\_$	$- 15$	$9(- x -1)(x - 1)$	$- 27$	*Égalité fausse*
$(x - 2)\_ + (2x + 3)\_$	49	$5x\_ + 13$	33	*Égalité fausse*

Deuxième partie

Le troisième prend x **=** *2 et en déduit que le résultat est faux. C'est lui qui a raison, les deux autres tombant sur des résultats qui sont par coïncidence en apparence exacts.*

Simplification de fractions comportant des lettres.

Exercice 1

Pour $a = 2$, $A = \frac{4a\_ + a}{2a} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$. *Pour la même valeur de* $a = 2$:

$A_1 = \frac{4a\_+1}{2} = \frac{17}{2}$ $\quad A_2 = 2a\_ + 1 = 9$ $\quad A_3 = \frac{2a+1}{2} = \frac{9}{2}$ $\quad A_4 = 2a = 4$

C'est donc $A_3 = \frac{2a+1}{2}$ *qui est la seule forme simplifiée possible.*

Exercice 2

$$A = \frac{a\_}{a + 1} - \frac{1}{a + 1} = \frac{a\_ - 1}{a + 1} = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a + 1} = a – 1 \text{ (si } a \neq - 1)$$

$$B = \frac{1}{a + 1} + \frac{2}{a\_ - 1} = \frac{a - 1}{a\_ - 1} + \frac{2}{a\_ - 1} = \frac{a - 1 + 2}{a\_ - 1} = \frac{a + 1}{(a - 1)(a + 1)} = \frac{1}{a - 1} \text{ (si } a \neq - 1)$$

$$C = \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{a - 1} + \frac{2}{a\_ - 1} = \frac{a - 1}{a\_ - 1} + \frac{a + 1}{a\_ - 1} + \frac{2}{a\_ - 1} = \frac{a - 1 + a + 1 + 2}{a\_ - 1}$$

$$= \frac{2a + 2}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{2(a + 1)}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{2}{a - 1} \text{ (si } a \neq - 1).$$

Exercice 3

$A = \frac{4a\_ + 4}{2a} = \frac{2(2a\_ + 2)}{2a} = \mathbf{\frac{2a\_ + 2}{a}}$

$B = \frac{x\_ + x}{3x} = \frac{x(x + 1)}{3x} = \mathbf{\frac{x + 1}{3}}$

$C = \frac{x\_ + x}{2x + 2} = \frac{x(x + 1)}{2(x + 1)} = \mathbf{\frac{x}{2}}$

$D = \frac{x\_ + 4x + 4}{3x + 6} = \frac{(x + 2)\_}{3(x + 2)} = \mathbf{\frac{x + 2}{3}}$

$E = \frac{4x + 8}{16} = \frac{4(x + 2)}{16} = \mathbf{\frac{x + 2}{4}}$

Factoriser avec les identités remarquables

Situations de base

Situations de base : reconnaître les formes développées classiques..

Expression	*Factorisable ou pas?*	*Forme factorisée*
x_ - 16	*Oui*	*(x - 4)(x + 4)*
x_ + 4 + 4x	*Oui*	*(x + 2)_*
x_ + 3x + 9	*Non, 3x n'est pas le double produit de x et de 3*	
x_ - 6x + 12	*Non, 6x n'est pas le double produit de x et* $\sqrt{12}$	
y_ - 8y + 16	*Oui*	*(y - 4)_*
x_ + 25	*Non , ce n'est une différence de deux carrés.*	
x_ - 8	*Oui*	*(x -* $\sqrt{8}$ *)(x +* $\sqrt{8}$ *)*
x_ - 2x + 1	*Oui*	*(x - 1)_*
x_ + 2x - 1	*Non, on n'ajoute pas les deux carrés.*	
4a_ + 12a + 9	*Oui*	*(2a + 3)_*
9 + 25b_ - 30b	*Oui*	*(5b - 3)_*
*- 9 + 16a_*	*Oui*	*(4a + 3)(4a - 3)*
81a_ + 100	*Non, ce n'est pas une différence de deux carrés.*	
*36 - 25b_*	*Oui*	*(6 - 5b)(6 + 5b)*

Situations complexes

Situations complexes : deux étapes; problèmes de signes.

*(- a - b)_ = [(- a) - b]_ = (- a)_ - 2(- a)b + b_ = a_ + 2ab + b_*

*(- a + b)_ = (b - a)_ = a_ - 2ab + b_*

(a - b)(- a - b) = - (a - b)(a + b) = - (a_ - b_) = b_ - a_.

*- (a + b)_ = - (a_ + 2ab + b_) = - a_ - 2ab - b_*

*- (a - b)_ = - (a_ - 2ab + b_) = - a_ + 2ab - b_*

- (a + b)(a - b) = - (a_ - b_) = b_ - a_.

Comparer :

*2(a + b)_ = 2 (a_ + 2ab + b_) = 2a_ + 4ab + 2b_*

*et [2(a + b)]_ = 4(a + b)_ = 4(a_ + 2ab + b_) = 4a_ + 8ab + 4b_*

[2(a + b)]_ = 2[2(a + b)_]

Exercice

Factoriser :

A = 2x_ - 8 = 2(x_ -4) = 2(x - 2)(x + 2)

*B = 3x_ + 12x + 12 = 3(x_ + 4x + 4) = 3(x + 2)_*

*C = 12x - 2x_ - 18 = - 2(x_ - 6x + 9) = - 2(x - 3)_*

D = (2x - 3)(x - 7) + (x_ - 14x + 49) = (2x - 3)(x - 7) + (x - 7)_ = (x - 7)[2x -3 + x - 7)

= (x - 7)(3x - 10)

Lunules

Pour retrouver le centre d'un arc de cercle, on place trois points sur cet arc. L'arc est alors un morceau du cercle circonscrit au triangle formé par ces trois. Il suffit alors de retrouver le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Pour cela, on trace les médiatrices de deux segments formés par ces trois points; et à leur intersection se trouve le centre de l'arc de cercle.

Aire d'un disque en fonction de son rayon R : A = πR_

Et puisque $R = \frac{D}{2}$, *on aura alors* $A = \pi \leftrightarrow (\frac{D}{2})? = \pi \frac{D?}{4}$ *en fonction du diamètre D.*

Pour un demi disque, l'aire du disque est à diviser par 2; on obtient :

$A' = \frac{1}{2} \leftrightarrow \pi \leftrightarrow R? = \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{\pi D?}{4} = \frac{\pi D?}{8}$

Le triangle :

(A + B) : demi disque de diamètre y , donc $A + B = \frac{\pi \leftrightarrow y?}{8}$

(D + E) : demi disque de diamètre z , donc $D + E = \frac{\pi \leftrightarrow z?}{8}$

(B + D + C) demi disque de diamètre x , donc $B + D + C = \frac{\pi \leftrightarrow x?}{8}$

Si on développe et réduit l'écriture :
(A + B) + (D + E) - (B + D + C) + C = A + B + D + E - B - D - C + C = A + E

$(A + B) + (D + E) - (B + D + C) = \frac{\pi \leftrightarrow y?}{8} + \frac{\pi \leftrightarrow z?}{8} - \frac{\pi \leftrightarrow x?}{8} = \frac{\pi}{8} \leftrightarrow (y? + z? - x?).$

Comme le triangle est rectangle, il vérifie la relation de Pythagore : x_ = y_ + z_ , donc la somme y_ + z_ - x_ = 0.
(A + B) + (D + E) - (B + D + C) + C = A + E , et(A + B) + (D + E) - (B + D + C) = 0, donc C = A + E.

Le carré :

Il suffit de le partager par une diagonale, et on retrouve deux fois la situation étudiée précédemment.

FICHES D'EXERCICES

Exercice 1

1. Calculs:

pour $x = \frac{7}{3}$: $5x - \frac{2}{3} = 5 \times \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{35-2}{3} = \frac{33}{3} = 11$

Si $x = -\frac{2}{3}$: $(-x + 3)(3x - 1) = [-(-\frac{2}{3}) + 3]\times[3\times(-\frac{2}{3}) - 1] = (\frac{2}{3} + 3)\times(-2 - 1)$

$= \frac{11}{3} \times (-3) = -11$

pour $x = 3$: $-x^2 + 3x + 1 = -3\_ + 3\times 3 + 1 = -9 + 9 + 1 = 1$

pour $x = -\frac{2}{3}$: $3x^2 - 2x - 1 = 3 \times (-\frac{2}{3})\_ - 2\times(-\frac{2}{3}) - 1 = 3\times\frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$

2. Réductions des écritures :

$x + x = 2x$ $\quad 4x \_ (-3x) \_ 2x = -24x^3$ $\quad 2x^2 \_ (-3x) \_ 4x^2 \_ (-5x) = 120x^6$

$-2x^2 + 3x + 1{,}2 + x^2 - \frac{x}{3} + 8 = -x\_ + \frac{8}{3}x + 9{,}2$ $\quad \frac{3x^2}{4} \leftrightarrow ¾ - \frac{2}{3} √ \leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{x^3}{6}$

3. Réduction des écritures :

$A = 3x - (2x + 5) = 3x - 2x - 5 = x - 5$
$B = 4 + (-3x + 2) = 4 - 3x + 2 = -3x + 6$
$C = -2x - (-5x + 1) + 3 = -2x + 5x - 1 + 3 = 3x + 2$
$D = (x + 4) + (2x - 3) = x + 4 + 2x - 3 = 3x + 1$
$E = x - (2x - 3) + (x + 3) = x - 2x + 3 + x + 3 = 6$
$F = x - (-4x - (-x - 3)) = x + 4x - x - 3 = 4x - 3$
$G = 3(x - 1) = 3x - 3$
$H = -2x(4x - 3) = -8x\_ + 6x$
$I = (2x + 1)(3x - 2) = 6x\_ - x - 2$
$J = (-x + 1)(x - 2) = -x\_ + 2x + x - 2 = -x\_ + 3x - 2$
$K = (2x + 3)(2x - 3) = 4x\_ - 6x + 6x - 9 = 4x\_ - 9$
$L = x + 2(x - 1) = x + 2x - 2 = 3x - 2$
$M = 2x - 3(x + 1) = 2x - 3x - 3 = -x - 3$
$N = 2 + (x - 1)(2x - 3) = 2 + 2x\_ - 3x - 2x + 3 = 2x\_ - 5x + 5$
$P = 3(2x - 3) - 2x(x + 2) = 6x - 9 - 2x\_ - 4x = -2x\_ + 2x - 9$
$Q = (x + 1)x - 3 = x\_ + x - 3$
$R = -3(x + 2) + (-x + 2)(x - 1) = -3x - 6 - x\_ + x + 2x - 2 = -x\_ - 8.$

Exercice 2

Développer et réduire

a) $2x^2(x^2 + 5x + 9) - 2x^2 - 15x = 2x^4 + 10x^3 + 18x\_ - 2x\_ - 15x = 2x^4 + 10x^3 + 16x\_ - 15x$

b) $(x - 3)^2 - 3x(2x - 1) = x\_ - 6x + 9 - 6x\_ + 3x = -5x\_ - 3x + 9$

c) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)(2x - 1) = 4x\_ - 4x + 1 + 4x\_ - 1 = 8x\_ - 4x$

d) $¾ 3x + \frac{1}{2} √^2 - (x - 2)(2x - 1) = 9x\_ + 3x + \frac{1}{4} - 2x\_ + x + 4x - 2 = 7x\_ + 8x - \frac{7}{4}$

e) ¾$2x + \frac{1}{2}$√↔$2 +$ ¾$x - \frac{1}{3}$√^{2} = 4x + 1 + x_ - $\frac{2}{3}$x + $\frac{1}{9}$ = x_ + $\frac{10}{3}$x + $\frac{10}{9}$

f) $(x-1)(2x+3) -$ ¾$x - \frac{1}{2}$√^{2} = 2x_ - 2x + 3x - 3 - x_ + x - $\frac{1}{4}$ = x_ + 2x - $\frac{13}{4}$

g) $(x+6)^2 - 2(2x-1)$ = x_ + 12x + 36 - 4x + 2 = x_ + 8x + 38

h) $(5x+2)^2 + (5x+2)(5x-1)$ = 25x_ + 20x + 4 + 25x_ - 5x + 10x - 2 = 50x_ + 25x + 2

i) $(3x+4)(4-3x) + (2x+1)(x-2)$ = 16 - 9x_ + 2x_ - 3x - 2 = - 7x_ - 3x + 14

j) $(5-2x)(2x+1) + (10-4x)(x-3)$ = 10x + 5 - 4x_ - 2x + 10x - 30 - 4x_ + 12x = - 8x_ + 30x - 25

k) $(3x-1)^2 - (3x+1)^2 + (3x+1)(3x-1)$ = 9x_ - 6x + 1 - 9x_ - 6x - 1 + 9x_ - 1 = 9x_ - 12x - 1

Exercice 3

1. *Développement du produit (a + 1)(b + 1) = ab + a+ b + 1*
2. *On cherche trois nombres a, b et c. Pour les deux premiers (a et b), on calcule leur produit et leur somme; on ajoute ces deux nombres et on obtient 34.*

Donc ab + (a + b) = 34. D'après ce qui précède, ab + a+ b + 1 = (a + 1)(b + 1). On a donc ab + a+ b + 1 = (a + 1)(b + 1) = 35. Les deux seuls nombres entiers dont le produit est 35 sont 5 et 7.

Donc : $\begin{matrix} a+1=5 \\ b+1=7 \end{matrix}$ d'où $a=4$ et $b=6$ $\quad$ $\begin{matrix} b+1=5 \\ a+1=7 \end{matrix}$ d'où $b=4$ et $a=6$

On fait de même pour les deux derniers (b et c) et on obtient 14. D'où (b + 1)(c + 1) = 15

$\begin{matrix} b+1=5 \\ c+1=3 \end{matrix}$ d'où $b=4$ et $c=2$ $\quad$ $\begin{matrix} b+1=3 \\ c+1=5 \end{matrix}$ d'où $b=2$ et $c=4$

Conclusion, les trois valeurs qui conviennent pour les deux conditions sont :

a = 6 b = 4 et c = 2

Exercice 4

A = x_ - x + $\frac{1}{4}$ B = x_ + $\frac{2}{3}$x + $\frac{1}{9}$ C = 9x_ + 12x + 4

D = $\frac{x\_}{4}$ - x + 1 E = $\frac{x\_}{9}$ + $\frac{x}{3}$ + $\frac{1}{4}$ F = $\frac{25}{4}$x_ - x + $\frac{1}{25}$

G = 3x_ - $\frac{3}{4}$ H = $\frac{x\_}{2}$ - $\frac{1}{8}$ I = (x - 1)_ + (3x - 3)((2x + 1)

J = (4x + 7)(5x + 2) + (10x + 4)(x + 5) K = x_ - 4 + (x + 2)(3x + 1)

Exercice 5

A = x_ + x + $\frac{1}{4}$ **= (x +** $\frac{1}{2}$**)_** B = 4a_ - 4a + **1 = (2a – 1)_**

C = 4x_ - 20xy + **25 = (2x – 5)_** D = 1 - 2a **+ a_ = (1 – a)_**

E = 9x_ - 12xy **+ 4y_ = (3x – 2y)_** F = x_ + $\frac{1}{4}$ **± x = (x ±** $\frac{1}{2}$**)_**

Exercice 6

La première erreur dans chacun de ces calculs :

2(x - 3)_ = (2x - 6)_ est FAUX car dans la première écriture le facteur 2 n'est pas au carré, alors qu'il se retrouve au carré dans l'écriture proposée ensuite.
*(2A)_ = 4A_ et non 2A_*

(-3 - x)_ = (- 3)_ + (-x)_ - 2 [-3 × (-x)] est FAUX. On peut effectivement utiliser le développement du produit remarquable (a + b)_ dans ce cas, en remplaçant a par (- 3) et b par (- x). Mais dans ce cas, le développement est : (- 3)_ + (-x)_ + 2 [-3 × (-x)].

(2x -5)_ = (2x -5) (2x + 5) est FAUX. (2x -5)_ = (2x -5)(2x – 5)

Exercice 7

1. Pour chacune des expressions suivantes, indiquer s'il s'agit d'une somme et énumérer ses termes, ou d'un produit et énumérer ses facteurs.

ex: 4a+3	*somme*	*ses termes sont **4a** et **3***
4(5-x)y	*Produit*	*3 facteurs : 4 , (5 – x) et y*
7+5(x+2)	*Somme*	*2 termes : 7 et 5(x+2)*
3(2x+3)(x-5)	*Produit*	*3 facteurs : 3 , (2x+3) et (x-5)*
(x+1)(x+2)+2x(x-1)	*somme*	*2 termes : (x+1)(x+2) et 2x(x-1)*

2. Les sommes suivantes sont de la forme ka + kb ou ka - kb. Compléter le tableau.

Somme	*k*	*a*	*b*	*Factorisations*
4x_+5x	***x***	***4x***	***5***	***x(4x + 5)***
12x_y+7y	***y***	***12x_***	***7***	***y(12x_ + 7)***
(5x-3)(2x-1)-5(2x-1)	***(2x – 1)***	***(5x – 3)***	***- 5***	***(2x – 1)(5x – 3 – 5)***
(x+3)_+(x+4)(x+3)	***(x + 3)***	***(x + 3)***	***(x + 4)***	***(x + 3)(x + 3 + x + 4)***

Exercice 8

$A = -5a^2b \leftrightarrow \left(-2a^3b\right)$ = $\mathbf{10a^5b}$**_**

$B = -2y - \left(3y - 6x\right)$ = **- 5y + 6x**

$C = -\left(5y - x + 3\right) + 3\left(6x - 4\right)$ = - 5y + x – 3 + 18x – 12 = **19x – 5y - 15**

$D = \frac{1}{3}\left(3a - 7\right) - \frac{1}{4}\left(8 - 4a\right)$ = $a - \frac{7}{3} - 2 + a$ = $\mathbf{2a - \frac{13}{3}}$

Exercice 9

A(x) = (x + 3)_ + (2x + 1)_ = x_ + 6x + 9 + 4x_ + 4x + 1 = ***5x_ + 10x + 10***
B(x) = (2 - x)_ + (4 + x)(4 - x) = 4 – 4x + x_ + 16 – x_ = ***- 4x + 20***
C(x) = (3x - 5)_ - (1 - 2x)_ = [(3x – 5) + (1 – 2x)][(3x – 5) - (1 – 2x)] = ***(x – 4)(5x – 6)***
D(x) = (4x - 3)(2 - x) + (9 - 12x)(10x + 9) = (4x - 3)(2 - x) + (- 3)(4x – 3)(10x +9)
= (4x – 3)[(2 – x) – 3(10x + 9)] = ***(4x – 3)(- 31x – 25)***

E(h) = πR_$h + \frac{2}{3}\pi R^3$.= π ***R_(h +*** $\mathbf{\frac{2}{3}}$ ***R)***

Exercice 10

x(2x + 1) = 2x_ + x

5x_(x + 7) = 5x^3 *+ 35x_*

3(2x + 1)(- x) = - 6x_ - 3x

3x(- 2x + 2) = - 6x_ + 6x

$-\frac{4x}{3}$*(- 6x + 9) = 8x_ – 12x*

(5x - 2)(2x + 3) = 10x_ + 11x - 6

$(x - \frac{1}{2})(2x + 1) = 2x\_ - \frac{1}{2}$

$5(2x - 8)(1 + 3x) = 30x\_ - 110x - 40$

$\frac{4x+1}{5}(3x + 2) = \frac{1}{5}(12x\_ + 11x + 2) = \frac{12x\_ + 11x + 2}{5}$

$(2y - 3)(4 - 5y) = -10y\_ + 23y - 12$

$(\frac{4}{5} - 2x)(2x + \frac{4}{5}) = \frac{16}{25} - 4x\_$

Exercice 11

Recopier et compléter le tableau

a	$3x$	$\frac{x}{2}$	$-2x$	$-\frac{3}{2}$
b	1	2	$0,5$	$\frac{x}{3}$
$a\_$	$\mathbf{9x\_}$	$\mathbf{\frac{x\_}{4}}$	$\mathbf{4x\_}$	$\mathbf{\frac{9}{4}}$
$2ab$	$\mathbf{6x}$	$\mathbf{2x}$	$\mathbf{-2x}$	$\mathbf{-x}$
$b\_$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{0,25}$	$\mathbf{\frac{x\_}{9}}$

$(a + b)\_ = a\_ + 2ab + b\_$

$(a - b)\_ = a\_ - 2ab + b\_$

$(a + b)(a - b) = a\_ - b\_$

Exercice 12

$(3x + 1)\_ = 9x\_ + 6x + 1$

$(\frac{x}{2} - 2)\_ = \frac{x\_}{4} - 2x + 4$

$(-2x + 0,5)\_ = 4x\_ - 2x + 0,25$

$(-\frac{3}{2} - \frac{x}{3})\_ = \frac{x\_}{9} + x + \frac{9}{4}$

$(3x - 1)\_ = 9x\_ - 6x + 1$

$(4x - 3)\_ = 16x\_ - 24x + 9$

$(-7 + 5x)\_ = 25x\_ - 70x + 49$

$(-3x - \frac{1}{3})\_ = 9x\_ + 2x + \frac{1}{9}$

$(\frac{x}{3} + 5)\_ = \frac{x\_}{9} + \frac{10x}{3} + 25$

$(x - 4)(x + 4) = x\_ - 16$

$(2x + 1)(2x - 1) = 4x\_ - 1$

$(3x + \frac{1}{2})(3x - \frac{1}{2}) = 9x\_ - \frac{1}{4}$

$(\frac{4}{5} - 2x)(\frac{4}{5} + 2x) = \frac{16}{25} - 4x\_$

$(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5})\_ = \frac{4}{9}x\_ + \frac{4}{5}x + \frac{9}{25}$

$(2x - \frac{1}{3})(2x + \frac{1}{3}) = 4x\_ - \frac{1}{9}$

$(2x - \frac{3}{4})\_ = 4x\_ - 3x + \frac{9}{16}$

Exercice 13

Utilisation des identités remarquables.

Somme	a_	b_	2ab	Factorisons sous la forme a_+b_±2ab
25x_+70x+49	**(5x)_**	**(7)_**	**2 × 5x × 7**	**(5x + 7)_**
25x_+9-30x	**(5x)_**	**3_**	**- 2 × 3 × 5x**	**(5x – 3)_ ou (3 – 5x)_**
9x_-24x+16	**(3x)_**	**4_**	**- 2 × 4 × 3x**	**(3x – 4)_ ou (4 – 3x)_**
ex: 4x_-25	(2x)_	(5)_	4x_-25 = (2x)_-5_ = **(2x-5)(2x+5)**	
16-x_	**4_**	**x_**	**(4 – x)(4 + x)**	
64x_-9	**(8x)_**	**3_**	**(8x – 3)(8x + 3)**	
(x-1)_-36	**(x– 1)_**	**6_**	**(x – 1 – 6)(x – 1 + 6) c'est à dire : (x – 7)(x + 5)**	

Exercice 14

L'expression	Est de la forme	Forme factorisée
8x_+32+32x	a_ + b_ + 2ab	8x_+32+32x = 8(x_ + 4x + 4) = 8(x + 2)_
9x_+48x+64	a_ + b_ + 2ab	9x_+48x+64 = (3x + 8)_
4x_+36+24x	a_ + b_ + 2ab	4x_+36+24x = (2x + 6)_
16x_-25	a_ - b_	16x_-25 = (4x – 5)(4x +5)
20x_-45	a_ - b_	20x_-45 = 5(4x_ - 9) = 5(2x + 3)(2x – 3)
9x_-64	a_ - b_	9x_-64 = (3x – 8)(3x + 8)
x_- 8x+16	a_ + b_ - 2ab	x_- 8x+16 = (x – 4)_
81x_-16x	ax + bx	81x_-16x = x(81x – 16)
(x+5)_+4(x+5)	ka + kb	(x+5)_+4(x+5) = (x + 5)(x + 5 +4) = (x + 5)(x + 9)

Exercice 15

A = (2x-3)(x+1) -5(6x-9) = (2x-3)(x+1) -5 × 3 × (2x – 3) = (2x – 3)[(x + 1) – 15] =

(2x – 3)(x – 14)

B = (16x_-1)-(4x-1)(x-3) = (4x + 1)(4x – 1) – (4x – 1)(x – 3) = (4x – 1)[(4x + 1) – (x – 3)]

= (4x – 1)(3x + 4)

C = 2x_ - 8 = 2(x_ - 4) = 2(x + 2)(x – 2)

*D = 12x - 60x_ + 75x^3 = 3x(4 – 20x + 25x_) = 3x(5x – 2)_*

E = 4x_ - 9 - (5x - 4)(2x + 3) = (2x – 3)(2x + 3) - (5x - 4)(2x+3)

= (2x + 3)[(2x - 3) - (5x - 4)] = (2x + 3)(- 3x + 1)