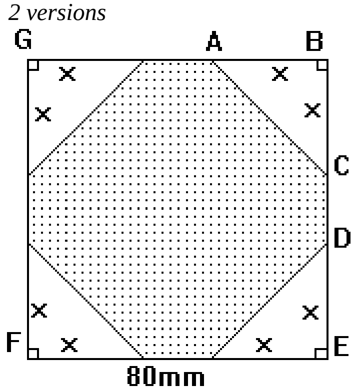
Pythagore

octogone pythagore racine carrée

2 versions



Dans un carré BEFG de côté 80mm, on délimite un octogone (polygone à 8 côtés, en pointillés sur la figure) en traçant un triangle rectangle isocèle de côté x à chaque coin du carré BEFG.comme l'indique le dessin. ABC est l'un de ces triangles, $AB = BC = x$.

1°

Expliquer pourquoi x varie entre 0 et 40mm.

Calculer l'aire du carré BEFG.

Exprimer en fonction de x l'aire du triangle ABC et l'aire de l'octogone.

2°

Calculer x pour que l'aire de l'octogone soit de $4600mm^2$.

3°

Exprimer en fonction de x les longueurs CD et AC. Calculer x pour que $AC = CD$.

CORRIGE

IV

1°

Pour que la figure soit un octogone:

$0 < 2x < 80mm$

$0 < x < 40mm$

Aire du carré BEFG: $80^2 = 6400mm^2$

Aire du triangle ABC rectangle en B:

$\frac{BA \leftrightarrow BC}{2} = \frac{x \leftrightarrow x}{2} = \frac{x^2}{2}$

Aire de l'octogone:

$= aireBEFG - 4 \leftrightarrow aireABC$

$= 6400 - 4\frac{x^2}{2} = 6400 - 2x^2$

2°

Equation:

$4600 = 6400 - 2x^2$

$2x^2 = 6400 - 4600$

$2x^2 = 1800$

$x^2 = 900$

$x = 30mm$

(x est positif donc -30 n'est pas une solution).

3°

$CD = BE - (BC + DE)$

$CD = 80 - 2x$

Le triangle ABC est rectangle en B:

D'après l'énoncé de Pythagore:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = x^2 + x^2$
$AC^2 = 2x^2$
$AC = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$
Equation:
$AC = CD$
$x\sqrt{2} = 80 - 2x$
$x\sqrt{2} + 2x = 80$
$x(\sqrt{2} + 2) = 80$
$x = \dfrac{80}{\sqrt{2} + 2}$ mm

<u>En fonction de</u>

Développer

2° 3° 4° 5° 8° : Dessiner une figure pour raisonner.

2° La longueur de l'arête d'un carré est x en cm. L'aire de ce carré augmente de $11\ cm^2$ si x augmente de 1cm. Calculer x.

3° L'aire d'un carré augmente de $147cm^2$ si l'on double la longueur x de chacun de ses côtés. Déterminer x.

4°a) Si l'on ajoute 3cm à la longueur x des côtés d'un carré, l'aire du carré augmente de $51\ cm^2$, déterminer x.

b) Si on enlève 3cm à la longueur x des côtés d'un carré, l'aire du carré diminue de $51\ cm^2$. Déterminer x.

5° On diminue deux côtés opposés d'un carré d'arête a de 5cm. Exprimer en fonction de a la longueur, la largeur et l'aire du rectangle obtenu. L'aire du rectangle obtenu est inférieure de $40cm^2$ à l'aire du carré de côté a. Déterminer a.

6° Exprimer l'aire en pointillés A en fonction de x et simplifier l'expression. Par essais trouver x tel que $A=84cm^2$, puis $A=75cm^2$. Encadrer x à 0,01cm près pour que $A=50cm^2$.

7° AB=10cm et I est le milieu de [AB], M_ [AI], IM=x.

Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de x, simplifier l'expression.

Pour quelles valeurs de x l'expression $MA^2 + MB^2$ est-elle la plus petite possible? la plus grande possible?

8° Le triangle ABC est rectangle en A, AB = x. Exprimer AC et BC, l'aire et le périmètre du triangle en fonction de x dans les cas suivants:
a) AB+AC=1dm. b) AC+BC=1dm. c) AB+BC=1dm.

triangle, en fonction de, équation

III
1° Construire un triangle ABC: $AB = 7{,}2cm$ $BC = 12cm$ $AC = 9{,}6cm$

2° Montrer que ce triangle est rectangle en A, calculer son aire.
3°a) Calculer $\cos \widehat{ACB}$ et $\sin \widehat{ACB}$ dans le triangle ABC.

b) Soit H la projection orthogonale d'un point M quelconque du segment [AC] sur le segment [CB] c'est-à-dire (MH) (BC)
Exprimer $\cos \widehat{ACB}$ et $\sin \widehat{ACB}$ en utilisant les côtés du triangle CMH.
On note $CM = x$. Montrer que $CH = 0{,}8\ x$ et $HM = 0{,}6\ x$.

4° Exprimer en fonction de x l'aire A et le périmètre P du triangle CMH.

5° Calculer x tel que: a) $A = 13{,}5\ cm^2$ b) $P = 12\ cm$
CORRIGE
III
1° *Utiliser le compas.*
2° BC est le plus grand côté, on calcule:
$AB^2 + AC^2 = 7{,}2^2 + 9{,}2^2 = 144$
$BC^2 = 12^2 = 144$
donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$
D'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
3° a)

$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{9,6}{12} = 0,8$

$\sin \widehat{ACB} == \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7,2}{12} = 0,6$

b) Le triangle HCM est rectangle en H:

$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{CH}{CM} = 0,8$ $\quad$ $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{HM}{CM} = 0,6$

$CH = 0,8 \times CM$ $\quad$ $HM = 0,6 \times CM$

c) *évident: on remplace CM par x.*

4° *formules:*

$A = \dfrac{CH \times HM}{2} =$

$A = \dfrac{0,8\,x \times 0,6\,x}{2}$

$A = 0,24\,x^2$

$P = CM + MH + CH$

$P = x + 0,6\,x + 0,8\,x$

$P = 2,4x$

5° Equations:

$A = 13,5$

$0,24\,x^2 = 13,5$

$x^2 = \dfrac{13,5}{0,24}$

$x^2 = 56,25$

$x = 7,5$

$P = 12$

$2,4x = 12$

$x = \dfrac{12}{2,4} = 5\text{cm}$

x est positif donc la solution $x = -7,5$ ne convient pas.

Problèmes avec équation produit

1° Vérifier que le triangle de côtés entiers consécutifs 3, 4 et 5 est rectangle.

2° (On cherche à savoir s'il existe d'autres triangles rectangles dont les côtés sont des entiers consécutifs).

Soit x la mesure du grand côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs.

a) Exprimer en fonction de x le petit côté de l'angle droit et l'hypoténuse de ce triangle.

b) Ecrire la relation entre les côtés de ce triangle rectangle.
Réduire chacun des membres de l'équation obtenue
En utilisant la méthode de l'équation produit, démontrer que seul le triangle de côtés 3, 4 et 5 est solution du problème.

CORRIGE

1°

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$5^2 = 25$

donc

$3^2 + 4^2 = 5^2$

La relation de Pythagore est vérifiée donc le triangle de côtés 3, 4 et 5 est rectangle.

2° a) le petit côté de l'angle droit est $x - 1$, l'hypoténuse est $x + 1$

b) Le triangle est rectangle, d'après l'énoncé de Pythagore :

$(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2$

$x^2 - 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 + x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

Solutions:

$x = 0$ $\qquad$ $x - 4 = 0$

$x = 4$

La solution $x = 0$ ne convient pas au problème car le plus petit côté mesurerait $0 - 1 = -1$ et une longueur est toujours positive.
La seule solution est donc $x = 4$, le petit côté de l'angle droit mesure donc $4 - 1 = 3$ et l'hypoténuse $4 + 1 = 5$.
Donc seul le triangle défini en 1° répond à la question.