ÉQUATIONS et INEQUATIONS

I. EQUATIONS

1/ VOCABULAIRE, PROPRIETE

Une **équation** est une **égalité** entre deux expressions mathématiques, appelées **membres** de l'équation, et où figurent une ou plusieurs **inconnues** (des grandeurs à déterminer).

Résoudre une équation, c'est **déterminer** le ou les éventuelles **valeurs** des inconnues pour lesquelles **l'égalité est vérifiée** entre les deux membres.

Pour cela on **transforme** cette équation en une succession d'équations ayant les mêmes solutions que l'équation initiale de façon à **isoler** le ou les **inconnues**. De telles équations sont dites équivalentes et on les obtient en utilisant les règles suivantes :

Propriété

Lorsqu'on ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une équation on obtient une équation équivalente.

Lorsqu'on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul les deux membres d'une équation on obtient une équation équivalente.

Exemples :

Soit à résoudre l'équation d'inconnue x : $x \boxed{-5} = -2$	Soit à résoudre l'équation d'inconnue x : $\boxed{-3}x = -2$
On a : $x - 5 + 5 = -2 + 5$	On a : $-3x\times\left(\frac{1}{-3}\right) = -2\times\left(\frac{1}{-3}\right)$
Donc, $x = -2 \boxed{+5}$	Donc, $x = \frac{-2}{\boxed{-3}}$
Donc, $x = 3$.	Donc, $x = \frac{2}{3}$.
L'équation admet une seule solution : le nombre 3	L'équation admet une seule solution : le nombre $\frac{2}{3}$

La propriété précédente peut donc se traduire par :

> **Lorsqu'on déplace de part et d'autre du signe « = » d'une équation le terme d'une somme algébrique, on le transforme en son opposé.**
>
> **Lorsqu'on déplace de part et d'autre du signe « = » d'une équation le facteur non nul d'un produit, on le transforme en son inverse.**

2/ EQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE (OU S'Y RAMENANT)

C'est une équation présentant une seule inconnue (qui peut apparaître plusieurs fois) qui n'est pas élevée à une puissance supérieure à un.

a/ Equation du type $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)

On doit avoir $ax + b = 0$, donc $ax = -b$ et $x = \frac{-b}{a}$. On obtient une seule solution, le nombre $\frac{-b}{a}$.

Exemples :

Résoudre l'équation d'inconnue x : $-2x + 3 = 0$	Résoudre l'équation d'inconnue x : $3x + 1 = -5$
On a : $-2x = -3$	On a : $3x = -5 - 1$
Donc, $x = \frac{-3}{-2}$	Donc, $x = \frac{-6}{3}$
Donc, $x = 1,5$	Donc, $x = -2$
L'équation admet une seule solution : le nombre 1,5	L'équation admet une seule solution : le nombre -2

b/ Equation du type ax + b = cx + d (a ≠ c)

Après avoir développé les éventuels produits, on regroupe tous les termes en x d'un même côté de l'égalité et, en réduisant ces termes en x, on est ramené au cas précédent.

Exemples :

Résoudre l'équation : $2x + 3 = 6x - 5$
On a : $2x - 6x = -5 - 3$
Donc, $-4x = -8$
Donc, $x = \frac{-8}{-4}$
Donc $x = 2$
L'équation admet une seule solution : le nombre 2

Résoudre l'équation : $5x - (3x + 2) = -5 - 2(7x - 6)$
On a : $5x - 3x - 2 = -5 - 14x + 12$
Donc, $5x - 3x + 14x = -5 + 12 + 2$
Donc, $16x = 9$
Donc $x = \frac{9}{16}$
L'équation admet une seule solution : le nombre $\frac{9}{16}$

c/ Equations comportant des nombres en écriture fractionnaire

Après avoir développé les éventuels produits, on réduit tous les termes des deux membres de l'équation au même dénominateur, puis on multiplie par ce dénominateur commun, ce qui revient à supprimer le dénominateur commun. Attention, un trait de fraction a valeur de parenthèse.

Exemples :

Résoudre l'équation : $-\frac{2}{3}x + 3 = 5(\frac{x}{2} - \frac{3}{25}) + \frac{3x}{5}$
On a : $-\frac{2}{3}x + 3 = 5\times\frac{x}{2} - 5\times\frac{3}{25} + \frac{3x}{5}$
Donc, $\frac{-2x}{3} + 3 = \frac{5x}{2} - \frac{3}{5} + \frac{3x}{5}$
Donc, $\frac{-20x}{30} + \frac{90}{30} = \frac{75x}{30} - \frac{18}{30} + \frac{18x}{30}$
Donc, $-20x + 90 = 75x - 18 + 18x$
Donc, $90 + 18 = 75x + 18x + 20x$
Donc, $118 = 113x$
Donc $\frac{118}{113} = x$
L'équation admet une seule solution : $\frac{118}{113}$

Résoudre l'équation : $\frac{1}{2} - \frac{3x + 1}{3} = 5 + \frac{x + 5}{6}$
On a : $\frac{3}{6} - \frac{(3x + 1)\times 2}{3\times 2} = \frac{30}{6} + \frac{x + 5}{6}$
Donc, $\frac{3}{6} - \frac{6x + 2}{6} = \frac{30}{6} + \frac{x + 5}{6}$
Donc, $3 - (6x + 2) = 30 + (x + 5)$
Donc, $3 - 6x - 2 = 30 + x + 5$
Donc, $3 - 2 - 30 - 5 = x + 6x$
Donc, $-34 = 7x$
Donc, $x = -\frac{34}{7}$
L'équation admet une seule solution : $-\frac{34}{7}$

d/ Equations où l'inconnue figure au dénominateur d'une écriture fractionnaire

On examine ici les cas qui se ramènent à des problèmes du premier degré.
On ramène le problème à une égalité entre deux fractions que l'on résout en écrivant l'égalité des produits en croix.

Exemples :

Résoudre l'équation : $\frac{3}{2} = \frac{5}{x}$ avec $x \neq 0$
On a : $3x = 2\times 5$
Donc, $3x = 10$
Donc, $x = \frac{10}{3}$
L'équation admet une seule solution : $\frac{10}{3}$

Résoudre l'équation : $\frac{5}{3} = \frac{x}{x + 1}$ avec $x \neq -1$
On a : $5(x + 1) = 3x$
Donc, $5x + 5 = 3x$
Donc, $5x - 3x = -5$
Donc, $2x = -5$
Donc, $x = -\frac{5}{2}$
L'équation admet une seule solution : -2,5

2/ EQUATION A UNE INCONNUE DE DEGRE SUPERIEUR OU EGAL A DEUX

C'est une équation présentant une seule inconnue (qui peut apparaître plusieurs fois) qui est élevée au moins une fois à une puissance supérieure ou égale à deux

a/ Equation produit nul

On appelle **équation produit nul**, une équation dont un **membre** est un **produit** de facteurs et dont l'**autre membre** est **nul**.

Propriété :

Lorsque l'un des facteurs d'un produit est nul, alors le produit est nul.
Réciproquement, si un produit de facteurs est nul, alors un de ses facteurs est nul.

Exemples :

Résoudre l'équation : $(2x + 3)(5 - x) = 0$
Si un produit de facteurs est nul, alors un de ses facteurs est nul

Donc ,$2x + 3 = 0$ **ou** $5 - x = 0$

Donc, $x = -\frac{3}{2}$ **ou** $x = 5$

Donc l'équation a deux solutions : -1,5 et 5.

Résoudre l'équation : $-2x(x + 4) = 0$
Si un produit de facteurs est nul, alors un de ses facteurs est nul

Donc, $-2x = 0$ **ou** $x + 4 = 0$

Donc, $x = 0$ **ou** $x = -4$

Donc l'équation a deux solutions : -4 et 0.

b/ Equation du type $x^2 = a$

Propriété :

$$\text{L'équation } x^2 = a \begin{cases} \textbf{si } \mathbf{a<0} \text{ n'a pas de solutions} \\ \textbf{si } \mathbf{a = 0} \text{ a une seule solution : } 0 \\ \textbf{si } \mathbf{a>0} \text{ a deux solutions } -\sqrt{a} \text{ et } \sqrt{a} \end{cases}$$

Exemples :

Résoudre : $x^2 + 5 = 7$.
On a : $x^2 = 7 - 5$.
Donc, $x^2 = 2$
Donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
Il y a deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Résoudre : $(2x - 3)^2 = 0$.
On doit avoir $2x - 3 = 0$
Donc $x = \frac{3}{2}$
Il y a une seule solution : 1,5

Résoudre $x^2 + 25 = 0$.
On a : $x^2 = -25$.
Donc, - 25 étant négatif, l'équation n'admet pas de solution.

c/ Autres cas

On se ramène au cas de l'équation produit nul : on isole tous les termes dans un seul membre de l'équation, laissant ainsi un membre nul, puis on factorise le membre non nul.
Si aucune factorisation n'est passible, alors on développe en espérant qu'en réduisant une simplification intervienne et nous replace dans un des cas précédemment traité.

Exemples :

Résoudre $(5x - 4)^2 = (2x + 3)^2$
On a : $(5x - 4)^2 - (2x + 3)^2 = 0$
Donc $[(5x - 4) + (2x + 3)]\,[(5x - 4) - (2x + 3)] = 0$
Donc $(7x - 1)(3x - 7) = 0$
Equation produit nul …

Résoudre $25x^2 - 10x + 1 = 0$.
On a : $(5x - 1)^2 = 0$ (identité remarquable)
On termine comme au deuxième exemple du b/ ci-dessus …

Résoudre $(x + 1)(x + 2) - (x + 3)(x + 4) = 0$
On ne sait pas factoriser mais en développant les x^2 se simplifient donc on a à faire en fait à une équation du premier degré …

Résoudre $(x + 5)(x + 2) + (x - 4)(2x + 1) = 0$
Idem, si on développe les x se simplifient et il reste à résoudre $2x^2 + 6 = 0$ …

II. RESOLUTION D'UN PROBLEME PAR UNE EQUATION.

Pour résoudre un problème grâce à une équation : on choisit l'inconnue, on traduit l'énoncé par une équation, on résout l'équation et enfin on rédige la conclusion.

III.INEQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

Le principe de résolution est le même que pour une équation mais on travaille ici avec des inégalités, il faut donc se méfier du signe du nombre par lequel on divise lors de la dernière étape de la résolution : en effet les nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse des nombres positifs ...

Exemples :

Résoudre l'inéquation d'inconnue x : $3x + 1 > -5$

On a : $3x > -5 - 1$

Donc, $x > \frac{-6}{3}$

Donc, $x > -2$

L'inéquation admet une infinité de solutions, l'ensemble constitué de tous les nombres strictement supérieurs à -2. On représente généralement cet ensemble sur une droite graduée :

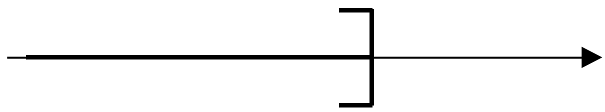
Résoudre l'équation d'inconnue x : $-2x + 3 \geq 0$

On a : $-2x \geq -3$

Donc, $x \leq \frac{-3}{-2}$

Donc, $x \leq 1{,}5$

L'inéquation admet une infinité de solutions, l'ensemble constitué de tous les nombres inférieurs ou égaux à 1,5. On représente généralement cet ensemble sur une droite graduée :



APPLICATION 1 :

Représenter sur les axes les ensembles des solutions des inéquations suivantes :

1/ $x < 5$	2/ $x \leq -4$	3/ $x \geq 0{,}5$	4/ $x > \frac{1}{3}$

APPLICATION 2 :

Résoudre les inéquations suivantes puis représenter l'ensemble des solutions sur un axe.

1/ $5 - 2x \geq 7$.

2/ $3x - 2 > x - 4$.

3/ $-4y + \frac{1}{2} \leq -9$.

4/ $x + 5 \leq 4(x + 1) + 7$.

5/ $\frac{3x - 2}{4} < -2$.

6/ $\frac{5x + 1}{6} > \frac{3x - 3}{8}$.