Développements et racines

Exercice : (Caen 97)

Développer E = $\left(\sqrt{3}-5\right)^2$

Correction :

$$\begin{aligned} E &= \left(\sqrt{3}-5\right)^2 \\ &= \sqrt{3}^2 + 5^2 - 2\times\sqrt{3}\times 5 \\ &= 3+25-10\sqrt{3} \\ &= 28-10\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice : (Rennes 96)

Développer et réduire $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(6-\sqrt{3}\right)$.

Correction :

$$\begin{aligned} Z &= \left(2\sqrt{3}-1\right)\left(6-\sqrt{3}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\times 6 - 2\sqrt{3}\times\sqrt{3} - 1\times 6 + 1\times\sqrt{3} \\ &= 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3}^2 - 6 + \sqrt{3} \\ &= 12\sqrt{3} - 2\times 3 - 6 + \sqrt{3} \\ &= 13\sqrt{3} - 12 \end{aligned}$$

Exercice : Amérique 97

1) Calculer : B = $\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)$.

2) Ecrire sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers les expressions :

C = $\left(4-2\sqrt{3}\right)^2$ et D = $\frac{1}{4}\times\left(28-16\sqrt{3}\right)$.

Correction :

1)

$$\begin{aligned} B &= \left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right) \\ &= 4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 16 - 2^2\sqrt{3}^2 \\ &= 16 - 4\times 3 \\ &= 16-12 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2)

$$
\begin{aligned}
C &= \left(4-2\sqrt{3}\right)^2 \\
&= 4^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times4\times2\sqrt{3} \\
&= 16+12-16\sqrt{3} \\
&= 28-16\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{4}\times\left(28-16\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}\times28-\frac{1}{4}\times16\sqrt{3} \\
&= \frac{28}{4}-\frac{16}{4}\sqrt{3} \\
&= 7-4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Exercice : (Rouen 98)

Écrire sous la forme $a+b\sqrt{2}$, où a et b sont des nombres entiers :

E = $5+6\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+4\right)$ F = $\left(7\sqrt{2}-4\right)^2$

Correction :

$$
\begin{aligned}
E &= 5+6\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+4\right) \\
&= 5+6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}+6\sqrt{2}\times4 \\
&= 5+18\sqrt{2}^2+24\sqrt{2} \\
&= 5+18\times2+24\sqrt{2} \\
&= 5+36+24\sqrt{2} \\
&= 41+24\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= \left(7\sqrt{2}-4\right)^2 \\
&= \left(7\sqrt{2}\right)^2+4^2-2\times7\sqrt{2}\times4 \\
&= 7^2\sqrt{2}^2+16-56\sqrt{2} \\
&= 49\times2+16-56\sqrt{2} \\
&= 94+16-56\sqrt{2} \\
&= 110-56\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exercice (Créteil 99)

On pose : E = $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)-8\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)$

Écrire E sous la forme a + b$\sqrt{5}$ (a et b sont des nombres entiers relatifs).

Correction :

$E = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) - 8\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$

$E = \sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2 - 8\sqrt{5}\times\sqrt{5} + 8\sqrt{5}\times 1$

$E = 5 - 3 - 8\times 5 + 8\sqrt{5}$

$E = -38 + 8\sqrt{5}$

Exercice : (Limoges 99)

1. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, b entier le plus petit possible, les nombres $\sqrt{18}$ et $\sqrt{12}$
2. Développer et simplifier $(10+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.
3. Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité?

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$10+4\sqrt{6}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	2

Correction :

1) $\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2)

$(10+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 10\times\sqrt{3} - 10\times\sqrt{2} + 4\sqrt{6}\times\sqrt{3} - 4\sqrt{6}\times\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{18} - 4\sqrt{12}$

$= 10\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 4\times 3\sqrt{2} - 4\times 2\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

3) Oui, c'est un tableau de proportionnalité, car les produits en croix sont égaux.

$(10+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

$2\times(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

Développements et racines avec expressions algébriques

Exercice : (Amiens sept 97)

1) Soient A $=3+\sqrt{11}$ et B = $3-\sqrt{11}$.

Calculer A² ; B² ; AB. Chaque résultat sera donné sous la forme d'une valeur exacte la plus simple possible.

2) Soient C = $\sqrt{45}\times\sqrt{10}$ et D = $2\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{2}$.

Comparer les nombres C et D après les avoir écrits sous la forme a$\sqrt{2}$, a étant un nombre entier.

Correction :

$$A^2 = \left(3+\sqrt{11}\right)^2$$
$$= 3^2 + \sqrt{11}^2 + 2\times 3\times\sqrt{11}$$
$$= 9+11+6\sqrt{11}$$
$$= 20+6\sqrt{11}$$

$$B^2 = \left(3-\sqrt{11}\right)^2$$
$$= 3^2 + \sqrt{11}^2 - 2\times 3\times\sqrt{11}$$
$$= 9+11-6\sqrt{11}$$
$$= 20-6\sqrt{11}$$

$$A\times B = \left(3+\sqrt{11}\right)\left(3-\sqrt{11}\right)$$
$$= 3^2 - \sqrt{11}^2$$
$$= 9-11 = -2$$

2)

$$C = \sqrt{45}\times\sqrt{10}$$
$$= \sqrt{9\times 5\times 5\times 2}$$
$$= \sqrt{9}\times\sqrt{5^2}\times\sqrt{2}$$
$$= 3\times 5\times\sqrt{2}$$
$$= 15\sqrt{2}$$

$$D = 2\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{25\times 2}+\sqrt{36\times 2}-\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{25}\times\sqrt{2}+\sqrt{36}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}$$
$$= 2\times 5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\sqrt{2}$$
$$= 10\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\sqrt{2}$$
$$= 15\sqrt{2}$$

Donc C=D

Exercice : (Clermont 99)

On donne A = $3\sqrt{2}-4$ et B = $3\sqrt{2}+4$

Calculer les valeurs exactes de A + B, A - B, A² et A × B.

Correction :

$$A+B = 3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}+4$$
$$A+B = 6\sqrt{2}$$

$A - B = 3\sqrt{2} - 4 - (3\sqrt{2} + 4)$
$A - B = 3\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} - 4$
$A - B = -8$

$A^2 = \left(3\sqrt{2} - 4\right)^2$
$A^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 4$
$A^2 = 9 \times 2 + 16 - 24\sqrt{2}$
$A^2 = 34 - 24\sqrt{2}$

$A \times B = \left(3\sqrt{2} - 4\right) \times \left(3\sqrt{2} + 4\right)$
$A \times B = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 4^2$
$A \times B = 9 \times 2 - 16 = 2$

<u>Exercice   :</u> <u>(Lille 96)</u>
En indiquant le détail des calculs, écrire chacun des nombres C et D sous forme d'un entier ou d'une fraction la plus simple possible.

C = $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$; D = $\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)^2$.

Correction :

$C = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt{2}}{\sqrt{9} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2}{3}$

$D = \left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)^2$
$= \sqrt{2}^2 + \sqrt{8}^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{8}$
$= 2 + 8 + 2\sqrt{16}$
$= 10 + 2 \times 4$
$= 18$

ou

$D = \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)^2$
$= \left(3\sqrt{2}\right)^2$
$= 3^2\sqrt{2}^2$
$= 9 \times 2 = 18$

<u>Exercice   :</u> <u>(Moyen-Orient 1995)</u> (2 points)
1) D = $\sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{27}$
Ecrire D sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier.
2) a = $3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}$ b = $3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}$

Ecrire et calculer le produit des nombres a et b.

Correction :

1)

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{27} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} \\ &= -9\sqrt{3} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} a \times b \quad & \left(3\sqrt{} - 2\sqrt{11}\right)\left(\ \sqrt{5} + 2\sqrt{}\ \right) \\ & \left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(\ \sqrt{11}\right)^2 \\ &= 3^2\sqrt{}^2 \quad 2^2\sqrt{11}^2 \\ &= \quad \times 5 \quad 4 \times \\ &= 45 \quad 44 = \end{aligned}$$

<u>Exercice</u> **<u>: (Poitiers 1995)</u>** (4 points)

On pose A=$\sqrt{48} + \sqrt{20}$ et B=$\sqrt{108} - \sqrt{45}$.

1) Montrer que :

- A s'écrit sous la forme $a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$
- et B s'écrit sous la forme $c\sqrt{3} + d\sqrt{5}$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs.

2) Montrer que le produit AB est un nombre entier.

Correction :

1)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{48} + \sqrt{20} \\ &= \sqrt{16 \times 3} + \sqrt{4 \times 5} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{3} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{108} - \sqrt{45} \\ &= \sqrt{36 \times 3} - \sqrt{9 \times 5} \\ &= \sqrt{36} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} AB &= \left(4\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right) \\ &= 2\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)3\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) \\ &= 2\times 3\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) \\ &= 6\left[\left(2\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{5}^2\right] \\ &= 6\left[2^2\times 3-5\right] \\ &= 6\times 7 = 42 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} AB &= \left(4\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)\left(6\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right) \\ &= 4\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}-4\sqrt{3}\times 3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\times 6\sqrt{3}-2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5} \\ &= 24\times 3-12\sqrt{15}+12\sqrt{15}-6\times 5 \\ &= 72-30 = 42 \end{aligned}$$

Développements - factorisations et racines

Exercice : (Caen 99)

Soit E = $(3x - 7)^2 - 16$.

1. Développer et réduire E.
2. Calculer E pour x = $\sqrt{3}$ (donner la valeur exacte sous la forme $a-b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers).

Exercice : (Europe 99)

1. Développer A(x) = (2x + 1) (2x -1).
2. Calculer A(x) pour x = $\sqrt{5}$.
3. Expliquer comment on peut utiliser la première question pour calculer 20 001 $\times$ 19 999.