3°: DEVOIR MAISON DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 :

1/ On considère l'expression $A = 3x^2 - 2x + 1$ où x est un nombre quelconque.

Calculer la valeur de A pour les valeurs de x suivantes : $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

On donnera, pour chaque calcul, un résultat exact sous sa forme la plus simple possible, suivi d'une valeur arrondie à 10^{-3}.

2/ On considère l'expression $B = (3x - 1)^2 - (x + 2)^2$ où x est un nombre quelconque.

a/ Calculer B pour $x = \sqrt{5}$.

On donnera le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des nombres relatifs.

b/ Factoriser B puis reprendre le calcul précédent à partir de cette nouvelle expression de B.

EXERCICE 2 :

On pose $a = \sqrt{181 + 52\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{181 - 52\sqrt{3}}$.

1/ a/ Vérifier à l'aide d'une calculatrice que $181 - 52\sqrt{3} > 0$.

b/ Justifier l'existence du nombre b.

2/ a/ Calculer a^2 et b^2 puis ab *(on demande des valeurs exactes simplifiées).*

b/ En déduire $(a + b)^2$ puis la valeur exacte de a + b.

3/ a/ Développer $(13 + 2\sqrt{3})^2$ et en déduire une écriture simplifiée de a.

b/ Développer $(13 - 2\sqrt{3})^2$ et en déduire une écriture simplifiée de b.

c/ Retrouver grâce aux deux questions précédentes la valeur exacte de a + b obtenue au 2/ b/.

EXERCICE 3 :

1/ On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que AB = 1 m.

a/ Calculer la valeur exacte de la longueur BC.

b/ Calculer la mesure en degré des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ *(ne pas utiliser la trigonométrie).*

c/ Calculer la valeur exacte de cos 45°,sin 45° et tan 45°.

Pour cos 45° et sin 45° on donnera des valeurs exactes sans radical au dénominateur.

2/ a/ Vérifier à l'aide d'une calculatrice que $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

b/ En utilisant la relation trigonométrique (chapitre 3 : 1) c/) liant sinus et cosinus d'un même angle aigu, en déduire la valeur exacte simplifiée de sin 60°.

c/ En utilisant la relation trigonométrique liant sinus, cosinus et tangente d'un même angle aigu, déduire de a/ et b/ la valeur exacte simplifiée de tan 60°.

3/ a/ Vérifier à l'aide d'une calculatrice que $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

b/ En utilisant la relation trigonométrique liant sinus et cosinus d'un même angle aigu, en déduire la valeur exacte simplifiée de cos 30°.

c/ En utilisant la relation trigonométrique liant sinus, cosinus et tangente d'un même angle aigu, déduire de a/ et b/ la valeur exacte simplifiée de tan 30° dans laquelle vous supprimerez le radical du dénominateur.

4/ Reproduire et compléter le tableau ci-dessous de valeurs dites remarquables en trigonométrie :

Angle aigu x	30°	45°	60°
sin x			
cos x			

3° : DEVOIR MAISON DE MATHEMATIQUES corrigé

EXERCICE 1 :

1/ $A = 3x^2 - 2x + 1$.

$x = \sqrt{2}$; $A = 3(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3\times 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 7 - 2\sqrt{2}$.

$x = 3\sqrt{2}$; $A = 3(3\sqrt{2})^2 - 2(3\sqrt{2}) + 1 = 3\times 9\times 2 - 6\sqrt{2} + 1 = 55 - 6\sqrt{2}$.

$x = -\sqrt{2}$; $A = 3\times(-\sqrt{2})^2 - 2\times(-\sqrt{2}) + 1 = 3\times 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 7 + 2\sqrt{2}$.

$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $A = 3(\frac{\sqrt{2}}{3})^2 - 2\times\frac{\sqrt{2}}{3} + 1 = 3\times\frac{2}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 = \frac{2}{3} -. \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 = \frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(= \frac{5 - 2\sqrt{2}}{3}\right)$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$; $A = 3(-\frac{\sqrt{2}}{3})^2 - 2\times(-\frac{\sqrt{2}}{3}) + 1 = 3\times\frac{2}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 = \frac{2}{3} +. \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 = \frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(= \frac{5 + 2\sqrt{2}}{3}\right)$

2/ $B = (3x - 1)^2 - (x + 2)^2$.

a/ Pour $x = \sqrt{5}$, $B = (3\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 2)^2 = (3\sqrt{5})^2 - 2\times 3\sqrt{5}\times 1 + 1^2 - ((\sqrt{5})^2 + 2\times\sqrt{5}\times 2 + 2^2$.
Donc pour $x = \sqrt{5}$, $B = 9\times 5 - 6\sqrt{5} + 1 - (5 + 4\sqrt{5} + 4) = 45 - 6\sqrt{5} + 1 - 5 - 4\sqrt{5} - 4$.
Finalement pour $x = \sqrt{5}$, $B = 37 - 10\sqrt{5}$.

b/ $B = [(3x - 1) - (x + 2)]\,[(3x - 1) + (x + 2)] = (3x - 1 - x - 2)(3x - 1 + x + 2)$.
Donc $B = (2x - 3)(4x + 1)$ et pour $x = \sqrt{5}$ on a :
$B = (2\sqrt{5} - 3)(4\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\times 4\sqrt{5} - 3 = 8\times 5 + 2\sqrt{5} - 12\sqrt{5} - 3 = 37 - 10\sqrt{5}$

EXERCICE 2 :

On pose $a = \sqrt{181 + 52\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{181 - 52\sqrt{3}}$.

1/ a/ $181 - 52\sqrt{3} \approx 90{,}9 > 0$.

b/ b existe bien puisque c'est la racine carrée d'un nombre positif : $181 - 52\sqrt{3}$.

2/ a/ $a^2 = \left(\sqrt{181 + 52\sqrt{3}}\right)^2 = 181 + 52\sqrt{3}$ et $b^2 = \left(\sqrt{181 - 52\sqrt{3}}\right)^2 = 181 - 52\sqrt{3}$.
$ab = \sqrt{181 + 52\sqrt{3}} \times \sqrt{181 - 52\sqrt{3}} = \sqrt{(181 + 52\sqrt{3})(181 - 52\sqrt{3})} = \sqrt{181^2 - (52\sqrt{3})^2}$.
Donc $ab = \sqrt{32761 - 2704\times 3} = \sqrt{24649} = 157$.

b/ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 181 + 52\sqrt{3} + 2\times 157 + 181 - 52\sqrt{3} = 181 + 314 + 181 = 676$.
donc $a + b = \sqrt{676} = 26$.

3/ a/ $(13 + 2\sqrt{3})^2 = 13^2 + 2\times 13\times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 169 + 52\sqrt{3} + 4\times 3 = 169 + 12 + 2\sqrt{3} = 181 + 52\sqrt{3}$
donc $a = \sqrt{(13 + 2\sqrt{3})^2} = 13 + 2\sqrt{3}$ car $13 + 2\sqrt{3} > 0$.

b/ $(13 - 2\sqrt{3})^2 = 13^2 - 2\times 13\times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 169 - 52\sqrt{3} + 4\times 3 = 169 + 12 - 2\sqrt{3} = 181 - 52\sqrt{3}$
donc $b = \sqrt{(181 - 2\sqrt{3})^2} = 13 - 2\sqrt{3}$ car $13 - 2\sqrt{3} > 0$.

EXERCICE 3 :

1/ a/ L'hypoténuse étant $[BC]$, le théorème de Pythagore donne : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Donc $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ et $BC = \sqrt{2}$.

b/ Le triangle étant isocèle en A, $\widehat{B} = \widehat{C}$, et comme il est rectangle en A : $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.

On en déduit immédiatement que $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$.

c/ $\cos 45° = \cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 45° = \sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\tan 45° = \tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{1} = 1$.

2/ a/ $\cos 60° = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$.

b/ On a $\cos^2 60° + \sin^2 60° = 1$ donc $\sin^2 60° = 1 - \cos^2 60° = 1 - (\dfrac{1}{2})^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Donc $\sin 60° = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (car $\sin 60° > 0$, 60° étant un angle aigu).

c/ $\tan 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$.

3/ a/ $\sin 30° = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$.

b/ On a $\cos^2 30° + \sin^2 30° = 1$ donc $\cos^2 30° = 1 - \sin^2 30° = 1 - (\dfrac{1}{2})^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Donc $\cos 30° = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (car $\cos 30° > 0$, 30° étant un angle aigu).

c/ $\tan 30° = \dfrac{\sin 30°}{\cos 30°} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4/

Angle aigu x	30°	45°	60°
sin x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$