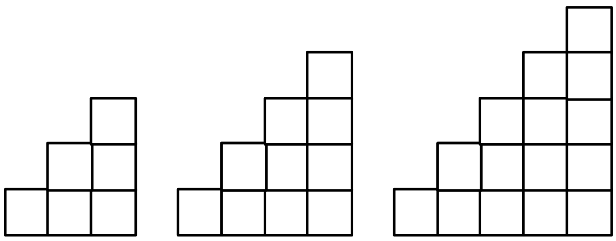
CHAPITRE 2
CALCULS ALGEBRIQUES
FACTORISATION

UTILISER DES LETTRES

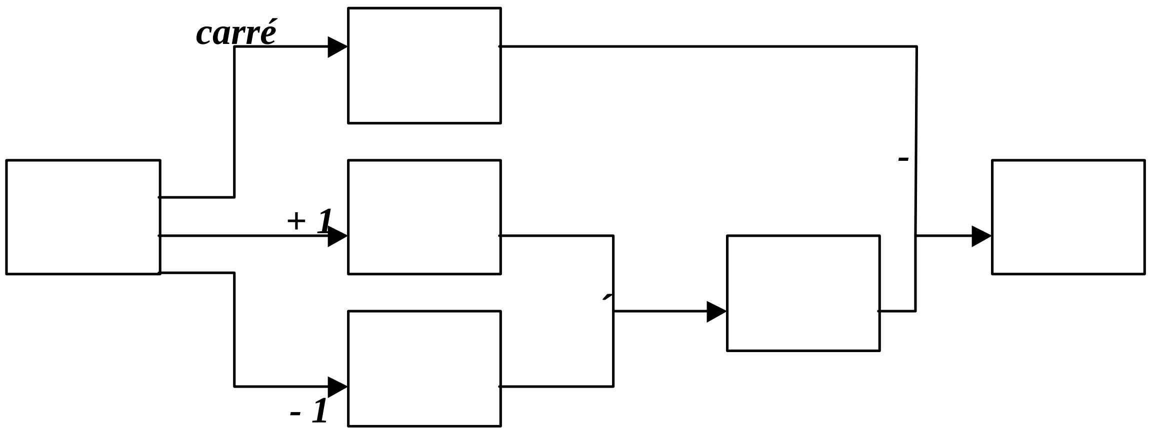
Exercice 1

On veut connaître le nombre de cubes nécessaires à la construction d'escaliers. Vérifier que les calculs proposés pour chaque escalier convient.
Envisager un mode de calcul (une "formule") qui permette de calculer le nombre total de cubes nécessaires pour la construction d'un escalier de taille quelconque.



Pour 3 marches	*Pour 4 marches*	*Pour 5 marches*	*Si on veut un escalier comptant un nombre quelconque n de marches.*
1 +2 + 3	*1 + 2 + 3 + 4*	*1 + 2 + 3 + 4 + 5*	
$3 \times 4 \div 2$	$4 \times 5 \div 2$	$5 \times 6 \div 2$	
Expressions numériques			***Expressions littérales****: on dit que le nombre de cubes se calcule* ***en fonction*** *du nombre de marches n.*

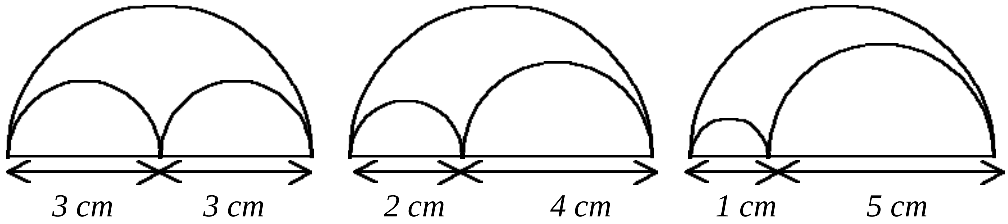
Exercice 2 (activité 4 page 25)



Compléter au crayon les cases de gauche à droite en choisissant successivement différentes valeurs dans la case de départ.
Compléter enfin, après ces différents essais numériques, les cases en plaçant le nombre n dans la case initiale.

Exercice 3 (11 p 24)

Dans chacun de ces trois cas, comparer la longueur du grand arc de cercle à la somme des deux petits. (On exprimera ces longueurs en fonction de p , pas besoin de valeurs approchées).



Généralisation :

Comparer la longueur du grand arc de cercle à la somme des deux petits dans le cas général où le diamètre du grand arc est 6 cm, et où l'un des deux petits arc a pour diamètre x.

(On exprimera ces longueurs en fonction de p , pas besoin de valeurs approchées)

L'autre petit arc a donc pour diamètre : ……….

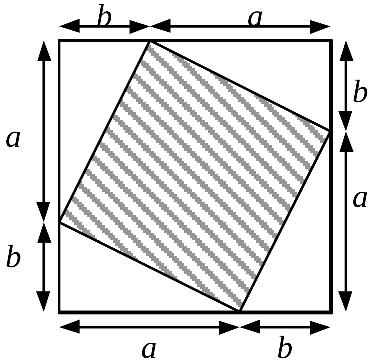
Exercice 4 : Les écritures algébriques de base : (n°87 A p 39)

Associer deux à deux (une expression algébrique et sa description).

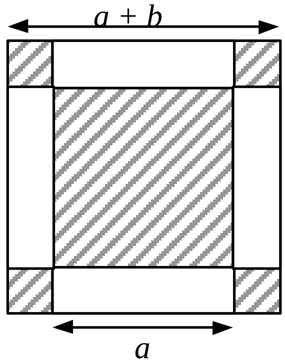
expression algébrique		description
$x + y$		La somme
$x^2 - y^2$		Le produit
$2(x + y)^2$		Le double produit
$(x - y)^2$		Le carré de la somme
xy		La somme des carrés
$(x + y)^2$		Le double du carré de la somme
$(x - y)(x + y)$		Le carré du double de la somme
$2xy$		Le carré de la différence
$[2(x + y)]^2$		La différence des carrés
$x^2 + y^2$		Le produit de la somme par la différence

Exercice 5 (N° 71)

Afin de les comparer, exprimer chacune des deux aires des zones grises :



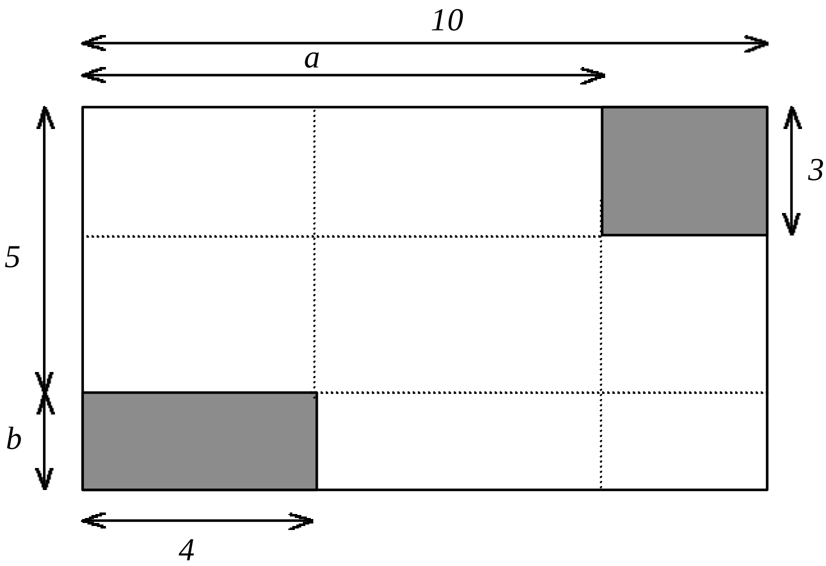
Penser à Pythagore



Déplacer les pièces.

EXPRESSIONS EQUIVALENTES

Exercice 1

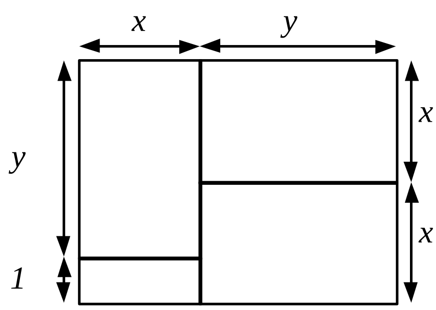


Exprimer l'aire de la partie non hachurée en fonction de a et de b :

- *Par soustraction des parties hachurées.*
- *Par découpage vertical*
- *Par découpage horizontal.*
- *En ajoutant les aires des sept rectangles blancs.*

Exercice 2

Chacune des expressions suivantes, sauf une, permettent de calculer l'aire de la figure ci-contre.



$\mathcal{A}_1 = (x + y)(y + 1)$

$\mathcal{A}_2 = xy + xy + xy + x$

$\mathcal{A}_3 = x^2(xy)$

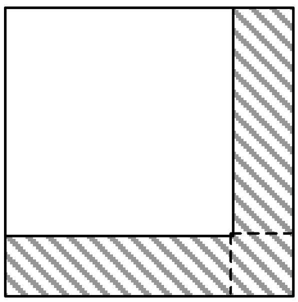
$\mathcal{A}_4 = x(1 + 3y)$

$\mathcal{A}_5 = 2x(x \ \ y)$

a) *Justifier chacune de ces expressions*

b) *Vérifier qu'elles sont toutes égales pour x = 3, sauf une.*

Exercice 3



Un carré a pour côté x. On diminue le côté de 2, pour obtenir un carré plus petit.

Retrouver parmi les expressions suivantes la seule qui permette d'exprimer la diminution de l'aire.

$\mathcal{A}_1 = (x + 2)^2 - x^2$

$\mathcal{A}_2 = x^2 - (x - 2)^2$

$\mathcal{A}_3 = (x - 2)^2 - x^2$

En partageant en trois la partie hachurée, montrer que cette diminution peut s'écrire : $\mathcal{A}_4 = 4(x - 1)$. *En déduire la mesure x si la diminution est de 20 cm².*

VOCABULAIRE DU CALCUL LITTERAL

Exercice 1 : Rappel des règles de priorité :

Les règles de priorité qui s'applique aux suites de calculs définissent l'ordre dans lequel ces calculs doivent être menés.
Les parenthèses ont toujours priorité sur les autres calculs.
Quand le problème des parenthèses est réglé, on s'intéresse aux différentes opérations, à savoir dans l'ordre :
Les puissances
Les produits et les quotients
Les sommes et différences

***Par exemple**, dans le calcul de l'expression : 8 - 3 ´ 5^3 + $(7 + 10)^2$*
On calcule dans l'ordre 8 - 3 ´ 5^3 + $(7 + 10)^2$ = 8 - 3 ´ 125 + 17^2 = 8 - 375 + 289 = - 78

Calculer les expressions suivantes :

$$A = 4\times5+7-6\times2$$
$$B = 9+6^2\times(7+5)$$
$$C = \left[\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)\right]-\left(-\frac{3}{5}+\frac{7}{5}-\frac{4}{15}\right)$$
$$D = (14-3\times5^2)+6^3\times3$$
$$E = 11^2-7\times4\times(13+8)$$
$$F = \frac{1-\frac{4}{7}}{1+\frac{4}{7}}$$
$$G = \left[\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{7}{9}\right)\right]\times\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$H = \left(-\frac{1}{10}+\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{9}\right)$$
$$J = \frac{-\frac{6}{5}-\frac{4}{7}}{\frac{11}{7}-\frac{3}{5}}$$

Exercice 2

S'agit il de produit ou de somme?
Mettre en évidence les différents termes dans le cas où il s'agit d'une somme, et les différents facteurs dans le cas de produits.

3,8 + 6 ´ 0,2	*4,31 ´ 525 + 4,31 ´ 775*
6 ´ 25 ´ 2,25	*0,24 ´ 11 + 9,76 ´ 11 - 10 ´ 8,32*
7,9 - 1,2 ´ 1,5	*24,3 ´ 18,5 - 14 ´ 18,5 + 18,5 ´ 19,7*
1,7 + 0,5 ´ n	*(4 +2,7)² ´ 9*

Exercice 3

Les trois nombres : a , b et c sont supposés non nuls .
Pour les sept expressions suivantes , dire s'il s'agit d'une somme (et en préciser les différents termes) , ou s'il s'agit d'un produit (et en préciser les différents facteurs):

$ab + c$; $\frac{a}{b} \times c$; $a(b + c)$; $\frac{a}{b} + c$; $\frac{a + c}{b}$; $ab + ac$; $(a - b)^2$

Exercice 4 (activité 5 page 25)

Pour chaque expression, déterminer s'il s'agit d'une expression factorisée (un produit) ou d'une expression développée (une somme).
Dans le cas d'un produit, dresser la liste des facteurs.
Dans le cas d'une somme dresser la liste des termes.

Expression	*Produit / somme?*	*Termes ou facteurs :*
(2x + 3)(2x - 1)		
4x² + 6x		
(2x + 1)²		
4x² + 4x - 3		
4x² ´ 4x + 1		
2x(2x + 3)		
(2x + 5)(x - 1) + 3		
(2x + 1)² - 4		
4x² ´ 6x		
$2x.\frac{1+x}{x-2}$		
$\frac{8}{3-2x} + 7x$		
(2x + 1)² ´ 4x - 1		

REDUCTIONS D'ECRITURES

Développer, c'est supprimer toutes les parenthèses .
Réduire, c'est écrire l'expression sous la forme comportant le moins de termes .

Exemple

Développer et réduire l'expression :

	$A = 3 - (a + 5 - b) + 2 - (3 - c)$:	
Développer	$A = 3 - a - 5 + b + 2 - 3 + c$	*(On supprime les parenthèses)*
Réduire	$A = - a + b + c - 3$	*(On effectue les sommes possibles)*

Exercice 1:

Développer et réduire les expressions :

$A = a + (b - 5 + a) - (13 - a + b)$ $\quad$ $B = - 8 + a - b - (4 - b) + (a + b - 6)$

$C = a + (b - 5 - b) + a - 6 + 8 - a$ $\quad$ $D = - (a + b - 7) - b - (- 5 + a - b)$

$E = b - (4- a - b- 6) + (2 - a + a - b)$ $\quad$ $F = 1 - (a - 9) + (3 + b) - (12 + a + b)$

Simplifier l'écriture d'un produit

Exemples

$A = 2ab^3 \times 3a^2b^2$ *peut s'écrire* $A = (2 \times 3) \times (a \times a^2) \times (b^3 \times b^2) = 6a^3 b^5$

$B = (4a^3b)^2$ *peut s'écrire* $B = 4a^3b \times 4a^3b = 16a^6b^2$

Pour la forme finale, on écrit en premier les facteurs numériques, puis les puissances dans l'ordre alphabétique.

Exercice 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = 3a^2b^3 \times 2ab^2$ $\quad$ $B = 4ab^3 \times 5a^4$ $\quad$ $C = 7a^3b \times 4b^7$

$D = - 4a^2bc \times 3ac^2$ $\quad$ $E = (-5a^3b) \times (-2a^3b^2c)$ $\quad$ $F = 4a^3c \times 2a^2bc^3$

$K = 3a^2b \times (4ab^2)^2$ $\quad$ $L = - 2ab^2 \times (-a^2b^3)^3$ $\quad$ $M = 3(a^2b^3)^2 \times 4(a^3b)^3$

Réduire l'écriture d'une somme

Exemples

Réduire l'écriture du nombre $A = 3x^4 + 4xy^2 + 5x^2 - 8xy + 2x^2 - 7y^2x$

Il faut chercher les termes semblables que l'on pourra additionner :

$5x^2 + 2x^2 = 7x^2$; $-7y^2x = -7xy^2$, *donc* $4xy^2 - 7xy^2 = - 3xy^2$

D'où l'écriture réduite de $\mathbf{A = 3x^4 - 3xy^2 + 7x^2 - 8xy}$

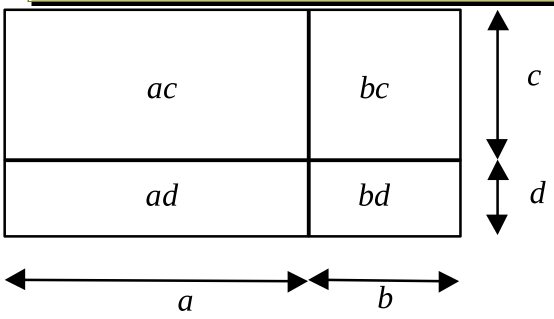
Exercice 3

Réduire l'écriture des nombres suivants :

$A = 2x^2 - 3 + 7x^2 - 4x + 3x - 4x^2$ $\quad$ $B = 9x^3 - 4x^2 + 9x^2 - 3x^3 + 8x$

$C = - 3b^2 + 4a^2 - 7a^2 + 9b^2 - 5a^2$ $\quad$ $D = 9a^2 - 4b^2 + 5a^2 - 7a^2 - 2b^2$

DEVELOPPER UN PRODUIT



L'aire du rectangle peut se calculer de deux manières : soit en considérant le rectangle de dimensions (a + b) et (c + d), soit en considérant les quatre petits rectangles le composant. On obtient alors deux expressions équivalentes qui généralisent la règle de distributivité à des produits dont les deux facteurs sont des sommes.

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

Pour développer ce produit de deux sommes, on multiplie chaque terme de la première par chaque terme de la deuxième.

Exercice 1 :

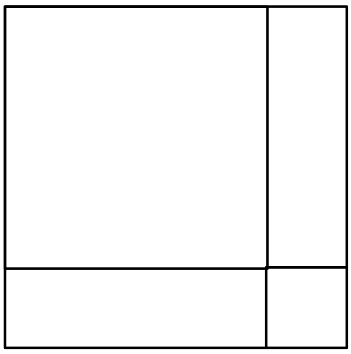
développer et réduire les expressions suivantes.

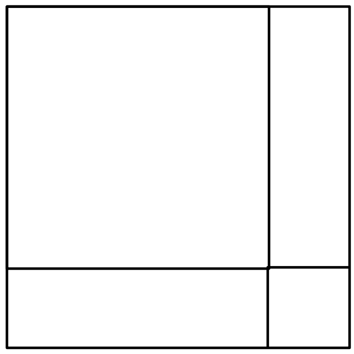
$(4a + 3)(3a + 5)$	$(3a - 2)(4a - 7)$	$(5a + 7)(4a + 1)$
$(- 3a + 2)(5a - 4)$	$(2b - 3)(2b - 7)$	$(3a - 4)(4a - 11)$
$(5b - 2)(- 3b + 2)$	$(3x - 4)(5x + 2)$	$(- 4x + 17)(- 3x - 21)$
$(5a - 3b)(4b + 3a)$	$(- a + 5b)(4b + 3a)$	$(2a - b)(- 7b + 4a)$

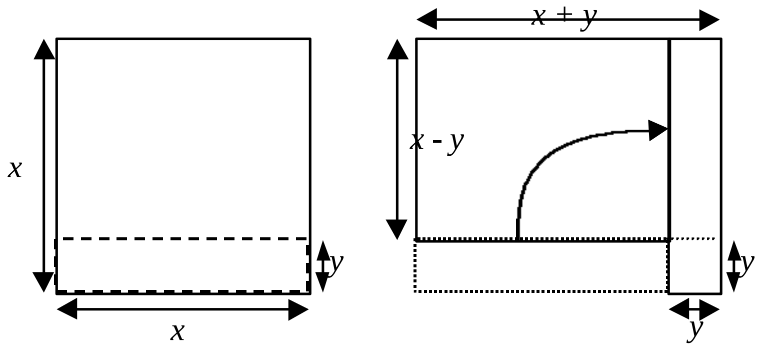
Développements remarquables :

Développer et réduire (a + b)(a + b) et (a - b)(a - b)

Placer les longueurs a et b sur chacune des deux figures pour illustrer ces deux égalités remarquables.







Expliquer comment ces deux figures illustrent le développement du produit remarquable : $(x + y)(x - y)$.

Exercice 2

Développer et réduire les produits suivants :

$(3x + 1)^2$	$\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$	$(-2x + 0{,}5)^2$	$\left(-\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)^2$
$(3x - 1)^2$	$(4x - 3)^2$	$(-7 + 5x)^2$	$\left(-3x - \frac{1}{3}\right)^2$
$\left(\frac{x}{3} + 5\right)^2$	$(x - 4)(x + 4)$	$(2x + 1)(2x - 1)$	$\left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{4}{5} - 2x\right)\left(\frac{4}{5} + 2x\right)$	$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right)^2$	$\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right)$	$\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$

Exercice 3

Après avoir développé et réduit chacune de ces expressions, donner une vérification avec la valeur de votre choix.

$$A = \frac{3x^2 - 2}{5} + \frac{2x^3 + 7}{15} - \frac{5x^3 - 3}{20}$$

$$B = 7(x + 3) + (x + 2)(x - 4)$$

$$C = (3x - 4)(5x - 2) - 7(2x + 3) - (3 - 2x)^2$$

$$D = 5(2x + 3)(x - 4) - 3[3(x - 4) + x(x - 2)]$$

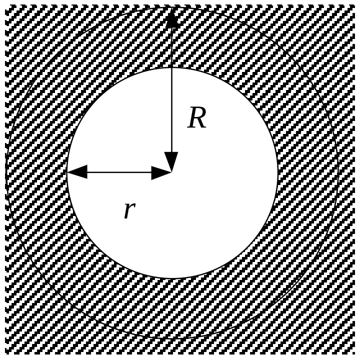
Exercice 4

Si n désigne un entier naturel, le nombre entier qui suit n est désigné par l'écriture (n + 1). On dit que n et (n + 1) sont deux entiers consécutifs.

1. *Donner une écriture simplifiée de la différence des carrés de deux entiers consécutifs.(le plus grand moins le plus petit)*
2. *Appliquer le **résultat précédent** pour calculer : $40^2 - 39^2$, puis 135^2 134^2.*
3. *Sachant que le carré de 70 est égal à 4 900, montrer comment, **par cette méthode**, on peut connaître rapidement le carré de 71.*
4. *Sachant que le carré de 90 est égal à 8 100, montrer comment, **par cette méthode**, on peut connaître rapidement le carré de 89.*

FACTORISATIONS SIMPLES

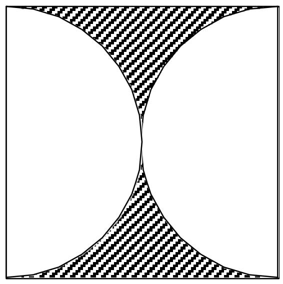
Exercice 3



Pour calculer l'aire de la partie hachurée, on utilise la formule : $A = pR^2 - pr^2$.

1. *Expliquer cette formule.*
2. *Factoriser cette expression.*
3. *Calculer cette aire en utilisant la formule factorisée lorsque $R = 8{,}5$ cm et $r = 5{,}5$ cm.*

Exercice 4



Pour calculer l'aire de la partie hachurée, on utilise la formule : $A = 4a^2 - pa^2$.

1. *Que représente le nombre a?*
2. *Factoriser l'expression.*
3. *Calculer l'aire pour $a = 5$ cm.*

EXERCICES

Exercice 1

Développe et réduis

a) $2x^2\left(x^2+5x+9\right)-2x^2-15x$ *b)* $(x-3)^2-3x(2x-1)$

c) $(2x-1)^2+(2x+1)(2x-1)$ *d)* $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2-(x-2)(2x-1)$

e) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)\times 2+\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ *f)* $(x-1)(2x+3)-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

g) $(x+6)^2-2(2x-1)$ *h)* $(5x+2)^2+(5x+2)(5x-1)$

i) $(3x+4)(4-3x)+(2x+1)(x-2)$ *j)* $(5-2x)(2x+1)+(10-4x)(x-3)$

k) $(3x-1)^2-(3x+1)^2+(3x+1)(3x-1)$

Exercice 2

1.Développer le produit (a + 1)(b + 1)

2.En utilisant la question précédente, résoudre le problème suivant :

On cherche trois nombres a, b et c. Pour les deux premiers, on calcule leur produit et leur somme; on ajoute ces deux nombres et on obtient 34. On fait de même pour les deux derniers et on obtient 14.