CHAPITRE 11
STATISTIQUES; POURCENTAGES; MOYENNES

Le but de ce chapitre est de porter une réflexion sur le traitement habituel de l'information chiffrée. L'usage que l'on fait au quotidien dans la presse, dans "l'information" des statistiques est souvent source de confusions et quelque fois d'erreurs.
Il s'agit donc ici de prendre le temps de se poser quelques questions sur des problèmes qui recèlent parfois des fausses évidences.

POURCENTAGES STATIQUES ET POURCENTAGES DE VARIATION

Un pourcentage est un rapport exprimé d'une manière particulière; il s'agit de comparer une quantité à 100.
*On parle de pourcentage **statique ou instantané** lorsque l'on compare des quantités prises à un moment donné, quand il n'y a pas de variation.*

Calculer un pourcentage :
Pour exprimer simplement un pourcentage, il suffit de placer clairement le problème dans un tableau de proportionnalité à quatre nombres, dont l'un est 100.
Par exemple :
Sur 835 lancers au panier au cours des matchs d'une saison, un basketteur en a réussi 144; ce qui représente un pourcentage p que l'on cherche.

Nombre de réussites	*144*	***p***
Nombre total d'essais	*835*	*100*

Donc : $p = \frac{144}{835} \leftrightarrow 100 \approx 17{,}25$ *%*

Appliquer un pourcentage
Appliquer un pourcentage p% à une quantité, c'est multiplier cette quantité par p et diviser par 100.
Par exemple 12% de 25 000 m_ représentent : $25\,000 \times \frac{12}{100} = 250 \times 12 = 3\,000$*m_*

Expression décimale d'un pourcentage :
Un pourcentage est donc avant tout une écriture particulière d'un nombre qui peut être exprimé d'une autre manière; en particulier, on peut en donner une simple écriture décimale, ou encore une écriture fractionnaire.
Par exemple, 50 % = 0,5. Donc pour calculer 50 % d'une quantité, on peut la multiplier par 0,5.
Mais 50 % = $\frac{1}{2}$ *(un demi, la moitié). On peut donc tout aussi bien diviser la quantité par 2.*
Il est bon de connaître les équivalences suivantes :

$1\% = 0{,}01$ $\quad 10\% = 0{,}1$ $\quad 20\% = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ $\quad 25\% = 0{,}25 = \frac{1}{4}$

$50\% = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ $\quad 75\% = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ $\quad 33\% \quad \frac{1}{3}$ $\quad 67\% \quad \frac{2}{3}$

Remarques :
Il est habituel d'exprimer un pourcentage instantané en comparant la partie à l'ensemble (le tout) auquel elle appartient, et on obtient donc un pourcentage inférieur à 100%.
De même si on compare deux grandeurs indépendantes (l'une n'est pas une partie de l'autre), il est plutôt habituel de comparer la petite à la grande plutôt que le contraire.
Par exemple si on compare deux salaires, l'un de 8 000 Fr. et l'autre de 10 000 fr., on dira que le premier représente les 80% du second. Et on dira rarement (mais rien ne l'interdit) que le second représente les 125% du premier.

Augmentation, diminution

Augmenter une quantité d'un certain pourcentage, c'est ajouter ce pourcentage aux 100% initiaux. C'est donc calculer un pourcentage supérieur à 100% de la quantité initiale.
Par exemple ajouter 10 %, c'est calculer (100 + 10), c'est à dire 110 % de la quantité initiale.
Au contraire, retirer 10 %, c'est calculer (100 - 10), soit 90 % de la quantité initiale.
Dans ces **pourcentages de variation***, on compare toujours la situation finale à la situation initiale. (le nouveau par rapport à l'ancien).*

Augmenter de	*Revient à multiplier par*
10%	*110% = 1,1*
20%	*120% = 1,2*
35%	*135% = 1,35*
100%	*200% = 2*
125%	*225% = 2,25*
18,6%	*118,6% = 1,186*
0,2%	*100,2% = 1,002*

Retirer	*Revient à multiplier par*
10%	*90% = 0,9*
20%	*80% = 0,8*
35%	*65% = 0,65*
100%	*0% = 0 (annuler)*
125%	*– 25% = – 0,25 (rendre négatif)*
18,6%	*81,4 % = 0,814*
0,2%	*99,8% = 0,998*

Pour calculer une variation en pourcentage, il suffit de calculer le rapport du nouveau à l'ancien et ensuite de comparer à 1.

Exemple 1 :
Ancien prix = 250 Fr. *Nouveau prix = 270 Fr.*
Variation : $\frac{270}{250}$ *= 1,08. Il y a une* **augmentation** *de 1,08 - 1 = 0,08 soit 8%*

Exemple 2 :
Ancien prix = 250 Fr. *Nouveau prix = 235 Fr.*
Variation : $\frac{235}{250}$ *= 0,94. Il y a une* **baisse** *de 1- 0,94 = 0,06 soit 6%*

POURCENTAGES "INVERSES"

Exemple 1 :

Un casse-tête assez fréquent est le calcul de la TVA sur un produit acheté TTC (c'est à dire incluant cette TVA).

Il est simple de calculer le prix TTC si l'on connaît le prix HT (hors taxe, avant d'y inclure la TVA) et le taux de la TVA.
Si un article coûte 1 500 Fr. HT et qu'on lui applique une TVA au taux de 20,6%, le prix TTC se calcule par : 1 500 × 1,206 (soit une augmentation de 20,6%), ce qui donne un prix TTC de 1 809Fr.
En revanche, retirer 20,6% à ce prix TTC ne permettra pas de retrouver le prix initial (HT). En effet, ces 20,6% étant calculés sur une valeur plus grande que 1 500 FR., on retirera donc plus que ce que l'on avait ajouté.
1 809 × 0,794 (soit une baisse de 20,6%) donne 1 436,35 Fr. environ, et non 1 500 Fr.

Pour retrouver le pourcentage "inverse" (celui qu'il faut retirer pour retrouver la valeur initiale), il est plus prudent de faire le petit schéma suivant :

|¾¾ + 20,6%→
Prix HT |¾¾ × 1,206 → *Prix TTC*
←¾ ÷ 1,206 ¾¾ |

Le prix TTC est donc divisé par 1,206. On peut dire aussi qu'il est multiplié par $\frac{1}{1,206}$*, ce qui vaut environ 0,829 et qui correspond à une baisse de 1 - 0,829 = 0,171, soit* ***17,1%***

Exemple 2 :

Un homme gagne 25% de plus que sa femme; peut-on dire qu'elle gagne 25% de moins que lui?

Prenons un exemple avec des valeurs simples.
Si le salaire de la femme est de 10 000 Fr. , celui du mari est donc de 10 000 × 1,25 c'est à dire 12 500 Fr.
Si on compare à l'inverse le salaire de la femme à celui de l'homme, on obtient $\frac{10000}{12500}$ *qui vaut 0,8. Et donc le salaire de la femme représente les 80% de celui de son mari. C'est à dire qu'il faut retirer 20% au salaire de l'homme pour trouver celui de femme.*

|¾¾ - 20%→
Mari *Femme*
←¾ +25% ¾¾ |

(Remarque : $\frac{1}{0,8} = 1,25$ *et* $\frac{1}{1,25} = 0,8$*)*

Exemple 3 :

Si le prix des communications téléphoniques baisse de 30%, peut-on en conclure que l'on pourra téléphoner 30% de temps en plus pour le même prix? *(on oublie ici le prix de l'abonnement et les autres frais divers)*

Le prix à payer pour ces communications se calcule en multipliant le nombre d'unités (qui dépend du temps passé à téléphoner) par le prix d'une unité. Appelons T le nombre d'unités et P le prix d'une unité.
Le nouveau prix de l'unité est égal à 0,7 × P pour une baisse de 30%. Appelons T' le nouveau nombre d'unités.
Si on dépense la même somme globale, il y a donc égalité entre T × P et T' × (0,7 × P).

$$T \times P = 0,7 \times T' \times P \quad \text{donc } T = 0,7 \times T' \qquad \text{d'où } T' = \frac{1}{0,7} \times T \approx \mathbf{1,43 \times T}.$$

Le temps de communication a été multiplié par 1,43 ce qui représente une augmentation non pas de 30%, mais bien de 43%. Ce qui n'est pas rien.

Ancien prix	|¾	*- 30%*	¾→	*Nouveau prix*
Ancienne durée	|¾	*+ 43%*	¾→	*Nouvelle durée*

VARIATIONS SUCCESSIVES

Un problème classique : le nénuphar

Un nénuphar double de taille tous les jours. En cinquante jours, il a entièrement recouvert une mare. En combien de temps avait-il recouvert la moitié de la mare?

Ce problème est très connu.
S'il double de taille chaque jour, il va de soi que la veille du jour où il a recouvert entièrement la mare, il en recouvrait seulement la moitié. Il lui faut donc 49 jours pour cela.
Il serait peut-être moins rapide de retrouver en combien de jours il n'avait recouvert qu'un tiers ou un dixième de la mare.
Doubler de taille, c'est l'augmenter de 100%, c'est à dire multiplier par 2. Inversement, si on retourne en arrière, il faut diviser la taille par deux pour chaque jour "en arrière".
Le 48ème jour il ne couvrait donc que le quart de la mare. C'est entre le 48ème et le 49ème jour qu'il couvrait le tiers de la mare.
Le 47ème jour, il couvrait un huitième.
Le 46ème jour, il; couvrait un seizième de la mare.
C'est entre le 46ème et le 47ème jour qu'il couvrait le dixième de la mare.

Variations successives

1. Deux hausses successives de 20% ne font pas une hausse de 40%

Ajouter 20%, c'est multiplier par 1,2. Ajouter deux fois successivement 20%, c'est multiplier deux fois par 1,2. Soit multiplier en tout par 1,2_ donc par 1,44. Cela correspond donc à une ***hausse de 44%.***

2. Deux baisses successives de 50% n'annulent pas. (ne correspondent pas à une baisse de 100%).

Retirer 50%, c'est multiplier par 0,5. Retirer deux fois successivement 50%, c'est multiplier deux fois par 0,5 soit en tout par 0,5_ = 0,25. Ce qui correspond à une ***baisse de 75%****.*

3. Une baisse de 20% ne compense pas une hausse de 20%

Ajouter 20%, c'est multiplier par 1,2. Retirer 20%, c'est multiplier par 0,8. Faire ces deux opérations successivement, cela revient à multiplier par : 1,2 × 0,8 = 0,96. Ce qui correspond à une ***baisse de 4%****.*

Intérêts composés

On épargne une somme que l'on appelle le capital. Ce capital donnent naissance à des intérêts qui sont calculés d'après un taux d'intérêts.
Par exemple, la somme de 5 800 Francs placés au taux de 12,4% fournit des intérêts égaux à $5\,800 \times \frac{12,4}{100} = 719,20$ *Fr.*
On parle d'intérêts composés lorsque à la fin de chaque année, les intérêts sont rajoutés au capital (on dit qu'ils sont capitalisés). Il s'agit donc d'une augmentation en pourcentage du capital.

Par exemple : On place 100 000 Fr. au taux de 4,5% l'an.

La première année les intérêts sont de $100\,000 \times \frac{4{,}5}{100} = 4\,500$ *Fr.*

A la fin de la première année, le nouveau capital est donc de 104 500 Fr.
Cela revient donc bien au même que de multiplier le capital initial par 1,045 (soit + 4,5%)
Si la somme initiale est déposée pendant plusieurs années sans modification, c'est chaque année le nouveau capital qui sert de base au calcul des intérêts. Il s'agit donc de multiplier chaque année par 1,045.

En …	*1 an*	*2 ans*	*3 ans*	*4 ans*	*n ans*
Le capital initial est multiplié par :	*1,045*	*1,045_*	$1{,}045^3$	$1{,}045^4$	$1{,}045^n$

D'une manière générale , si C est le capital initial, T le taux d'intérêt annuel, et N le nombre d'années du placement, la somme capitalisée en N années se calcule par :

$$C \times \left(\frac{100 + T}{100}\right)^N .$$

Possibilité d'approximer

On a vu précédemment que deux augmentations successives ne donnaient pas une augmentation dont le taux serait la somme des deux taux particuliers.
Augmenter deux fois successivement de 20% ne donne pas une augmentation de 40%..
Pour une augmentation annuelle de 20%, on obtient

En …	*2 ans*	*3 ans*	*4 ans*	*5 ans*
Augmentation globale de …	*44% (car 1,2 × 1,2 = 1,44)*	*72,8%*	*107,4%*	*148,8%*
Et non …	*40%*	*60%*	*80%*	*100%*

En revanche, pour des taux faibles, le taux global calculé est si proche qu'il peut se confondre avec celui que l'on obtient par multiplication du taux annuel par le nombre d'années :
Pour une augmentation annuelle de 1,2%, on obtient

En …	*2 ans*	*3 ans*	*4 ans*	*5 ans*
Augmentation globale de …	*1,012_ ¾→ soit + 2,41%*	*+ 3,64%*	*+ 4,88%*	*+ 6,15%*
Années × 1,2	*2,4%*	*3,6%*	*4,8%*	*6%*

Dans les premières années, il n'y a pas de différence importante; on peut se contenter du calcul approché taux × années. Tout dépend du taux lui-même et de la durée (l'écart se creuse avec le nombre d'années). Par exemple en 15 années au taux de 1,2%, on obtient un taux global exact de 19,6% au lieu de 18%. En 25 années, on obtient 34,7% et non 30%

Pourcentage moyen (sur deux ans). Moyenne géométrique

Inversement, si on recherche quel est le taux moyen (le même pour les deux années) qui a pu mener à un taux global de variation sur deux années, il ne convient pas de diviser par 2.
Par exemple : Si 20 000 Fr. donne un capital de 22 684,5 Fr. au bout de deux années.

Le taux global est égal à $\frac{22\,684{,}5}{20\,000} = 1{,}134 \ldots$ *soit + 13,4%.*

On doit donc chercher par quel coefficient la somme initiale a été multipliée deux fois successivement : *20 000 |¾ × a → |¾ × a → 22 684,5.*
20 000 a été multiplié par a_, qui doit être égal à 1,134. Donc $a = \sqrt{1{,}134} \approx 1{,}065$
*Ce qui correspond à une **augmentation de 6,5% environ**.*

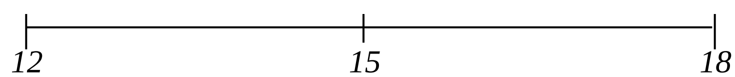
MOYENNES PONDEREES : LES COEFFICIENTS.

Moyenne arithmétique

La moyenne de deux nombres est égale à la demi-somme de ces nombres : $m = \frac{a+b}{2}$.

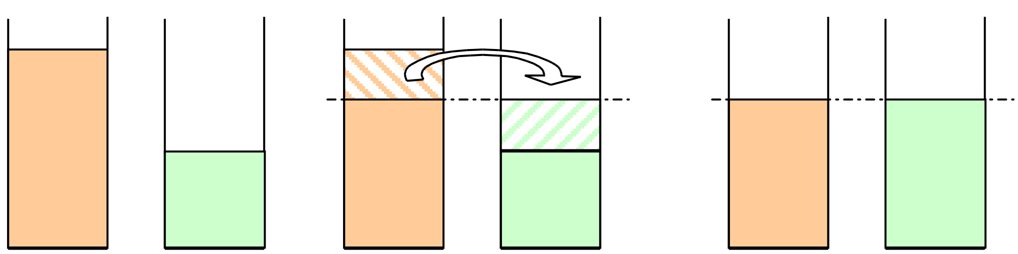
C'est une valeur qui a le même écart avec chacun des deux nombres a et b.
Par exemple 15 est la moyenne de 12 et 18, car il y a un écart de 3 entre 12 et 15 et entre 15 et 18.
C'est le nombre commun qui pourrait remplacer les deux nombres initiaux pour un même résultat global.
Pare exemple, pour deux notes à des devoirs, la note 15 obtenue à chacun des deux devoirs donnerait le même total de points sur l'ensemble des deux devoirs que les notes 12 à l'un, et 18 à l'autre .

Graphiquement, sur un axe gradué, la moyenne des deux nombres a et b est l'abscisse du milieu de [AB] où A est le point d'abscisse a et B celui d'abscisse b.



La manière la plus naturelle de calculer l'abscisse du milieu :
Entre 12 et 18, il y a un écart de 6.
Donc la moitié de [AB] mesure 3.
Donc le milieu se situe à 12 + 3 ou à 18 -3; c'est à dire à 15.

Autre représentation visuelle de la moyenne :



Les deux valeurs sont différentes

On équilibre des deux côtés (on retire là où il y le plus et l'on rajoute là où il y a le moins)

Pour obtenir deux valeurs égales à la moyenne.

Généralisation : moyenne pondérée

Pour plus de deux valeurs, le calcul se fait sur le même principe : on ajoute toutes les valeurs et l'on divise la somme par le nombre total de valeurs.

Par exemple : pour calculer la moyenne de notes suivantes

12 15 13 9 11 10 14 12 17 11 10

On peut la calculer ainsi :

$\dfrac{12 + 15 + 13 + 9 + 11 + 10 + 14 + 12 + 17 + 11 + 10}{11}$ *, et l'on obtient environ 12,18.*

On pourrait cependant repérer les notes qui sont identiques et constituer un tableau présentant les différentes valeurs et leurs effectifs (le nombre de fois où elles apparaissent).

Note	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*17*
effectif	*1*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*1*

Plutôt que de répéter chaque note dans une somme, on la fera apparaître dans le calcul affectée d'un coefficient (multipliée par) correspondant à l'effectif.

$\dfrac{9 + 10 \times 2 + 11 \times 2 + 12 \times 2 + 13 + 14 + 15 + 17}{11}$.

La moyenne est alors dite pondérée (on dit parfois coefficientée). Pondérée signifie que chaque note "pèse" en fonction de son effectif; par exemple le 11 compte ("pèse") deux fois plus que le 9.

D'une manière générale, une moyenne pondérée se calcule ainsi :

$\dfrac{\text{somme des produits des différentes valeurs par leurs coefficients}}{\text{somme des coefficients}}$

Dans un examen comme le bac ou le brevet , les notes portent des coefficients qui rendent compte de l'importance relative qu'on attribue à chaque épreuve.

Par exemple, les notes suivantes :

Épreuve	*1*	*2*	*3*
Note	*12*	*8*	*13*
Coefficient	*2*	*5*	*3*

Donneront la moyenne suivante : $\dfrac{12 \times 2 + 8 \times 5 + 13 \times 3}{10} = \dfrac{103}{10} = 10{,}3$

Petit problème :

Deux élèves se présentent au bac. Pour simplifier, on ne conserve que les deux notes de français et de math.

Élève 1	*note*	*coeff*	*Élève 2*	*note*	*coeff*
Math	*15*	*3*	*Math*	*13*	*7*
Français	*6*	*6*	*Français*	*4*	*3*

L'élève 1 aura une moyenne de $\dfrac{3 \times 15 + 6 \times 6}{9} = 8{,}1$

L'élève 2 aura une moyenne de $\dfrac{13 \times 7 + 4 \times 3}{10} = 10{,}3$

C'est à dire que l'élève 2, bien qu'ayant de moins bonnes notes dans chaque matière aura une meilleure moyenne, grâce aux coefficients.

MOYENNES PARTIELLES ET MOYENNES GLOBALES

Les salaires moyens dans deux entreprises (effet de structure)

Situation :
Deux entreprises A et B.
Dans l'entreprise A, le salaire moyen des femmes est de 8 000 Fr. ,celui des hommes est de 12 000 Fr.
Dans l'entreprise B, le salaire moyen des femmes est de 9 000 Fr. ,celui des hommes est de 13 000 Fr.
Malgré les apparences (évidemment trompeuses) il est possible que le salaire moyen pour l'ensemble du personnel soit supérieur dans l'entreprise A. Comment?

La seule chose que l'on peut affirmer à la lecture de cet énoncé, c'est que le salaire moyen dans l'entreprise A est compris entre 8 000 et 12 000 Fr. et que dans l'entreprise B , il est compris entre 9 000 et 13 000 Fr.
Ce qui va décider du salaire moyen, c'est la part relative des hommes et des femmes dans chacune de ces deux entreprises.
S'il y a autant d'hommes que de femmes dans les deux entreprises, il va de soi que le salaire moyen est la moyenne arithmétique dans un cas comme dans l'autre. Le salaire moyen dans l'entreprise A est alors de 10 000 fr. ;et il est de 11 000 Fr. dans l'entreprise B.
Mais une proportion plus grande d'hommes dans l'entreprise A va faire évoluer le salaire moyen vers des valeurs plus grandes et le rapprocher de 12 000. Inversement, s'il y a plus de femmes dans l'entreprise B, le salaire moyen va se rapprocher de 9 000.

Prenons des exemples

Entreprise A	*Hommes*	*Femmes*	*Salaire moyen*
	40%	*60%*	*9 600*
	60%	*40%*	*10 400*
	75%	*25%*	*11 000*

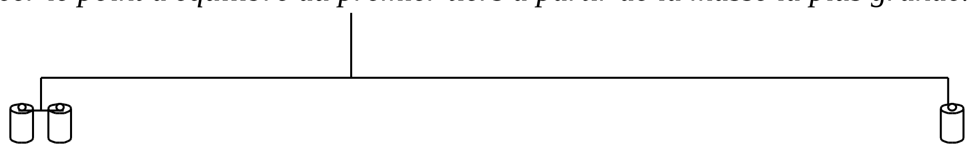
Entreprise B	*Hommes*	*Femmes*	*Salaire moyen*
	60%	*40%*	*11 400*
	40%	*60%*	*10 600*
	20%	*80%*	*9 800*

On voit donc que toutes les situations sont possibles, et que le fait de connaître des moyennes partielles (sur des parties de l'effectif total) ne permet pas de conclure sur la moyenne générale
Pour les entreprises, on appelle cela l'effet de structure, c'est à dire la répartition des types et des niveaux d'emplois.

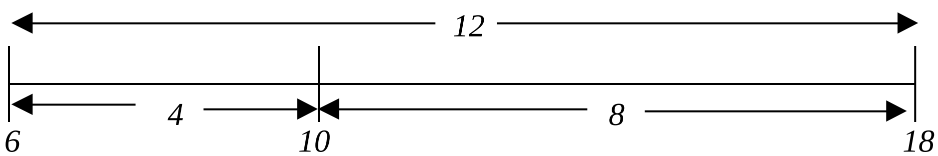
REPRESENTATION VISUELLE DE LA MOYENNE DE DEUX NOMBRES

La balance, le mobile

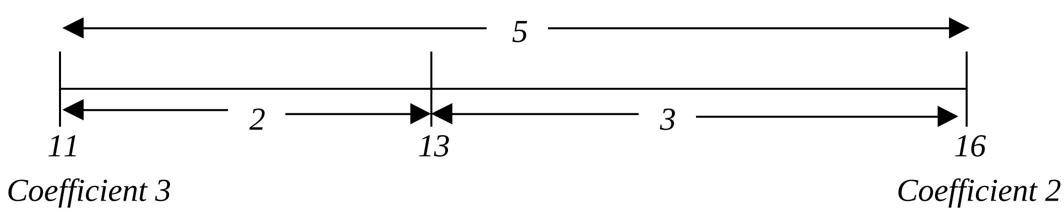
Supposons une tige de métal de longueur 12 cm.
Si on la suspend à un fil, il faut placer ce fil au milieu de la tige pour qu'elle tienne en équilibre.
Maintenant, si on suspend aux extrémités de cette tige des masses, l'une étant deux fois plus lourde que l'autre, il faut bien sûr déplacer la position du fil pour que la tige reste en équilibre. On le déplace vers le plus lourd afin qu'il soit deux fois plus près de la masse double que de la masse simple.
Si la longueur totale est 12 cm, il faut la partager en trois tiers (3 fois 4 centimètres), et placer le point d'équilibre au premier tiers à partir de la masse la plus grande.

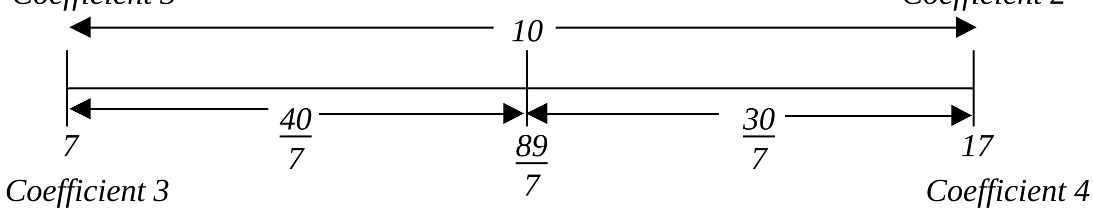


Cette image illustre la situation pour le calcul de la moyenne de deux valeurs qui ont un écart de 12, et qui sont affectées de coefficients dont l'un est le double de l'autre.
Supposons que l'on calcule la moyenne des nombres 6 (coefficient 2) et 18 (coefficient 1) :
Cette moyenne est égale à : $\frac{6 \times 2 + 18}{3} = 10$*. Illustration sur un segment gradué :*



Autres exemples :





Dans ce dernier cas, il faut partager le segment en 7. Chaque morceau mesure $\frac{10}{7}$ *cm.*
Le point d'équilibre se trouve à la quatrième graduation à partir de 7. Ce qui correspond au nombre $7 + \frac{40}{7} = \frac{89}{7}$

MOYENNE DES VITESSES ET VITESSE MOYENNE

Exemple simple.

Un cycliste parcourt les 35 km qui le mènent du village en haut du col en 2 heures et redescend au village par le même chemin en une demi-heure. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble de son parcours ?

Sa vitesse à l'aller est de 17,5 km/h et sa vitesse au retour est de 70 km/h. Sa moyenne sur l'ensemble du parcours peut-elle être égale à $\frac{17,5 + 70}{2}$ *, c'est à dire : 43,75 km/h (c'est à dire la moyenne des deux vitesses)?*

Le calcul de la vitesse se fait en fonction du temps et de la distance parcourue par : $V = \frac{D}{T}$.

Ici, la distance totale parcourue est de 70 km (2 fois 35 km) et le temps total de parcours est de 2 heures et demi (ou 5 demi heures)

Il parcourt donc $\frac{70}{5}$ *=14 km en une demi-heure soit* ***28 km en 1 heure****. On est donc loin des 43,75 km/h espérés.*

Comment se calcule, en général, la vitesse moyenne en fonction des deux vitesses?

Supposons que l'on parcourt la même distance D à l'aller (vitesse v_1*) et au retour (vitesse* v_2*). On appelle* T_1 *le temps de parcours à l'aller et* T_2*, le temps de parcours au retour.*

$T_1 = \frac{D}{V_1}$ *et* $T_2 = \frac{D}{V_2}$

La vitesse moyenne se calcule en divisant la distance totale par le temps total.

$$V = \frac{D + D}{T_1 + T_2} = \frac{2D}{\frac{D}{V_1} + \frac{D}{V_2}} = \frac{2D}{D(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}$$

Cette relation est plus souvent présentée ainsi : $\frac{1}{V} = \frac{1}{2}(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})$

On dit que V est la moyenne harmonique de V_1 *et* V_2*..*

Dans quel cas y a -t - il égalité entre les deux types de moyennes?

Pour le même temps passé à des vitesses différentes (donc pour des distances différentes) :

$V = \frac{D + D'}{T + T} = \frac{D + D'}{2T} = \frac{1}{2} \times (\frac{D + D'}{T}) = \frac{1}{2} \times (\frac{D}{T} + \frac{D'}{T}) = \frac{1}{2} \times (V + V')$ *. On obtient dans ce cas la moyenne des vitesses.*

INFLUENCE DE L'EFFECTIF TOTAL SUR LA MOYENNE

L'histoire des paysans

Il n'est pas rare d'entendre les paysans se plaindre de leur situation économique catastrophique, et , dans le même temps entendre que le revenu moyen des paysans soit en augmentation.
Le problème est le suivant : est il possible que le revenu de chaque paysan baisse pendant que le revenu moyen de l'ensemble des paysans augmente? (situation extrême choisie pour illustrer un paradoxe apparent).

Cela est en effet possible. Il suffit de se poser quelques questions sur ce qui peut se passer d'une année à l'autre , entre les deux moments qui servent de base au calcul des variations des revenus des paysans et de la moyenne de ces revenus.
L'année initiale, les paysans ont des revenus très variés, mais, parmi eux, certains ont des revenus très faibles, si faibles qu'ils ne pourront continuer à exploiter leurs terres, qu'ils devront fermer leur exploitation, et qu'ils ne feront donc plus partie des paysans recensés l'année suivante. Leurs revenus qui n'étaient pas très élevés ne pèsent pas bien lourd dans le calcul du revenu moyen de l'ensemble des agriculteurs. Ainsi, en diminuant le nombre de paysans et en diminuant un peu le revenu global de l'agriculture parvient-on à augmenter le revenu moyen.
Prenons un exemple :
Supposons que pour l'année de l'enquête , il y ait 600 000 agriculteurs qui disposent d'un revenu moyen de 8 500 Fr.
Supposons qu'à la fin de cette année, il n'y ait plus que 550 000 agriculteurs; que les 50 000 agriculteurs qui ont disparu n'avaient chacun qu'un revenu de 2 000 Fr. par an (c'est excessif, mais c'est pour l'exemple), et que chaque agriculteur a vu son revenu baisser de 2%. Comment a varié le revenu moyen?

	Nombre de paysans	*Revenu total des paysans*	*Revenu moyen*
Début de l'année	*600 000*	*8 500 × 600 000 =* $5{,}1 \times 10^9$ *Fr.*	*8 500 Fr.*
Fin de l'année	*550 000*	$[5{,}1 \times 10^9 - (2\,000 \times 50\,000)] \times 0{,}98 = 4{,}9 \times 10^9$ *Fr.*	*8 909 Fr.*

Conclusion : certains agriculteurs disparaissent, tous les autres voient leur revenu baisser; en conséquence de quoi le revenu moyen des agriculteurs augmente.

Comment augmenter la moyenne sans changer les valeurs.

Il suffit donc de faire disparaître quelques unes des valeurs les plus petites (mais pas forcément) pour qu'une moyenne augmente sans modifier les autres valeurs.
Par exemple sur un ensemble de notes calculons la moyenne avec toutes les notes, puis en excluant les deux valeurs extrêmes :

15 14 14 12 11 9 4 Moyenne : 11,29
14 14 12 11 9 Moyenne : 12,8

VARIATION DE LA MOYENNE PAR L'AJOUT D'UNE VALEUR SUPPLEMENTAIRE

Une autre manière de calculer la moyenne

Dans le cas de valeurs entières ou simples, on peut opérer un autre calcul pour évaluer la moyenne.

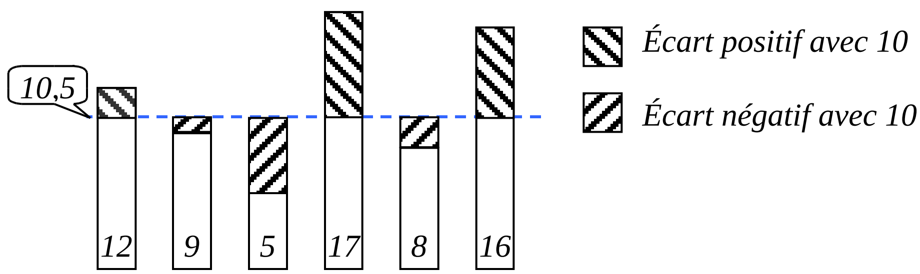
***Exemple** : A la lecture de la liste de notes suivantes :*

12 9 5 17 8 16

On peut comparer chacune de ces notes avec la note moyenne 10, et exprimer l'écart entre la note et la note moyenne 10 par un nombre relatif. Puis calculer la somme de ces écarts, pour ensuite la répartir sur l'ensemble des six notes. Ce qui donne :

(12 - 10) + (9 - 10) + (5 - 10) + (17 - 10) + (8 - 10) + (16 -10) = 2 - 1 - 5 + 3 - 2 + 6 = + 3

L'ensemble des notes présente un écart de 3 points par rapport à la note moyenne 10, ce qui représente un écart moyen de + 0,5 points. Donc la moyenne est 10,5.



Autre exemple :

Pour les notes suivantes : 13 17 18 16 on peut estimer la moyenne autour de 15 et appliquer le principe précédent en prenant comme valeur de référence ce nombre 15.

La somme des écarts est - 2 + 2 + 3 + 1 = + 4. Ces quatre points sont à répartir sur les quatre notes, ce qui donne une moyenne égale à 15 + 1 = 16.

Comment calculer sa nouvelle moyenne en connaissant l'ancienne et la note rajoutée.

On peut, au lieu de recalculer le nouveau total de points et la nouvelle moyenne, essayer de comprendre l'apport de cette nouvelle et l'évolution qu'elle induit sur la moyenne.

Sur quatre notes, la moyenne d'un élève est de 12,5.

1er cas : la cinquième note est supérieure à la moyenne, par exemple 15.

Cette nouvelle note a un écart positif de 2,5 par rapport à l'ancienne moyenne. Ce supplément doit être partagé entre les cinq notes sur lesquelles on calcule la nouvelle moyenne, soit une augmentation de 0,5 point pour la moyenne. Nouvelle moyenne : 13.

2ème cas : la cinquième note est inférieure à la moyenne, par exemple 8.

Cette nouvelle note a un écart négatif de 4,5 par rapport à l'ancienne moyenne. Ce déficit doit être partagé entre les cinq notes sur lesquelles on calcule la nouvelle moyenne, soit une diminution de 0,9 point pour la moyenne. Nouvelle moyenne : 11,6.

Généralement :

$$\text{Nouvelle moyenne} = \text{Ancienne Moyenne} + \frac{\text{Ecart entre nouvelle note et ancienne moyenne}}{\text{Nouveau total de notes}}$$

STATISTIQUES

Dans ce chapitre nous nous limiterons à l'étude d'un exemple, une étude statistique portant sur l'âge des élèves d'un collège.

1) Population étudiée et vocabulaire

*La **population** étudiée est constituée de tous les élèves d'un collège qui se décompose comme suit :*
En sixième, il y a 11 élèves de 10 ans, 38 de 11 ans, 24 de 12 ans, 2 élèves de 13 ans.
En cinquième, il y a 5 élèves de 11 ans, 25 de 12 ans, 25 de 13 ans, 20 élèves de 14 ans.
En quatrième, il y a 3 élèves de 12 ans, 17 de 13 ans, 36 de 14 ans, 10 de 15 ans, 6 élèves de 16 ans.
En troisième, il y a 14 élèves de 13 ans, 22 de 14 ans, 23 de 15 ans, 3 de 16 ans, 2 élèves de 17 ans.

*Le **caractère (ou variable)** étudié est l'âge des élèves, ce caractère a pour valeur 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 ou 17 (ans).*
*Les élèves sont répartis en différentes **classes** ou **catégories** ; la classe des 10 ans, la classe des 11 ans, la catégorie des 12 ans, la catégorie des 13 ans etc ...*

2) Tableau des effectifs

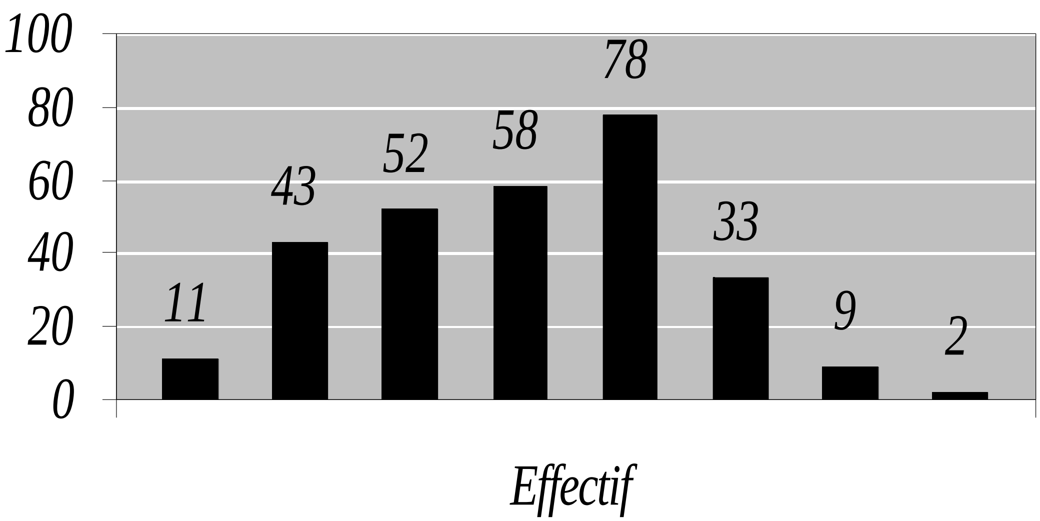
*Pour mieux présenter les résultats, on utilise le **tableau des effectifs**, indiquant le nombre d'élèves ayant un âge donné.*

Classe	*10 ans*	*11 ans*	*12 ans*	*13 ans*	*14 ans*	*15 ans*	*16 ans*	*17 ans*	***Total***
Effectif	*11*	*43*	*52*	*58*	*78*	*33*	*9*	*2*	*286*

L 'effectif total est de . 286.

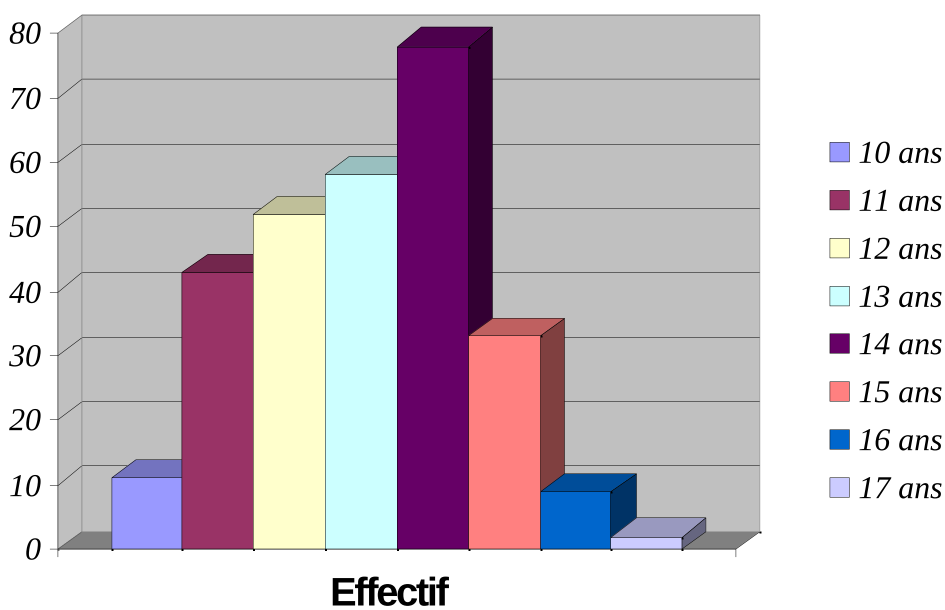
3) Diagramme en bâtons

*A partir du tableau précédent, on peut tracer le **diagramme en bâtons** correspondant, les valeurs prises par le caractère sont portées en abscisses, les effectifs sont reportés en ordonnées.*



4) Diagramme en barres ou histogramme

On peut aussi tracer le diagramme en barre ou histogramme correspondant au même tableau. Les valeurs prises par les caractères (âges) sont portées en abscisse et les effectifs en ordonnées.



5) Fréquence

A partir du tableau des effectifs, on peut calculer les ***fréquences*** *de chacune des valeurs. Par exemple, la fréquence de la valeur 10 est :* $f = \frac{11}{286}$ 0,0385.

On peut également calculer la ***fréquence en pourcentage*** *: par exemple,*
$\frac{11}{286}$ $0{,}0385 = \frac{3{,}85}{100} = 3{,}85\%$
Cela signifie qu'environ 3,85 % des élèves de ce collège ont 10 ans.

	Effectif	**Fréquence**	**Fréquence en %**
10 ans	*11*	*0,0385*	*3,85%*
11 ans	*43*	*0,1503*	*15,03%*
12 ans	*52*	*0,1818*	*18,18%*
13 ans	*58*	*0,2028*	*20,28%*
14 ans	*78*	*0,2727*	*27,27%*
15 ans	*33*	*0,1154*	*11,54%*
16 ans	*9*	*0,0315*	*3,15%*
17 ans	*2*	*0,0070*	*0,70%*
Total	*286*	**1**	**100 %**

6) Diagramme circulaire

On peut aussi tracer le ***diagramme circulaire*** *ou le diagramme* ***semi-circulaire*** *("l'assemblée en demi cercle"). Pour cela, il faut calculer l'angle correspondant à chaque classe ou catégorie.*

Calcul de l'angle pour la classe des 10 ans

L'angle est ***proportionnel*** *à l'effectif.*

Effectif	*11*	*286*
Angle	α	*360 °*

donc $\alpha = \frac{11 \times 360}{286} \approx 13{,}8°$

Cas général

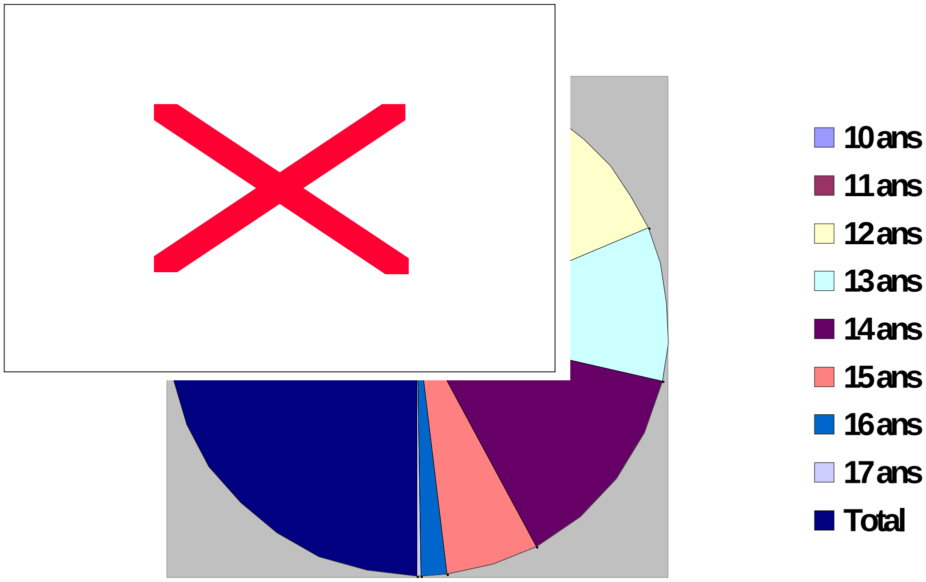
T = Effectif total ; E = effectif de la classe

Effectif	*T*	*E*
Angle	*360°*	β

Donc $\beta = \frac{E \times 360}{T}$. *Or la fréquence f est définie par* $f = \frac{E}{T}$, *donc* $\beta = f \times 360$

Remarque : Pour le ***diagramme semi-circulaire****, la somme des angles est de 180 °.*
Pour réaliser les deux diagrammes, on remplit le tableau suivant :

	Effectif	**Fréquence**	**Fréquence en %**	**Angle D.C.**	**Angle D.S.C.**
10 ans	*11*	*0,0385*	*3,85%*	*13,85*	*6,92*
11 ans	*43*	*0,1503*	*15,03%*	*54,13*	*27,06*
12 ans	*52*	*0,1818*	*18,18%*	*65,45*	*32,72*
13 ans	*58*	*0,2028*	*20,28%*	*73,01*	*36,50*
14 ans	*78*	*0,2727*	*27,27%*	*98,98*	*49,09*
15 ans	*33*	*0,1154*	*11,54%*	*41,54*	*20,77*
16 ans	*9*	*0,0315*	*3,15%*	*11,33*	*5,66*
17 ans	*2*	*0,0070*	*0,70%*	*2,52*	*1,26*
TOTAL	**286**	**1**	**100 %**	**360°**	**180°**



7) Effectifs cumulés

Le caractère (ou la variable, c'est à dire l'âge) est numérique. Les valeurs peuvent être ordonnées. On peut donc déterminer des ***effectifs cumulés*** *croissants ou décroissants.*
Pour ce faire, on remplit le tableau suivant :

Catégorie	*Effectif*	*Effectif cumulé croissant*	*Effectif cumulé décroissant*
10 ans	11	11	286
11 ans	43	54	275
12 ans	52	106	232
13 ans	58	164	180
14 ans	78	242	122
15 ans	33	275	44
16 ans	9	284	11
17 ans	2	286	2
TOTAL	286	286	286

On pourra à l'aide de ce tableau, dire sans refaire des calculs :
le nombre d'élèves ayant moins de 14 ans est de 164
le nombre d'élèves ayant plus de 13 ans est de 122

8) Moyenne et moyenne pondérée

Définition : La moyenne de plusieurs valeurs est le quotient de la somme de toutes les valeurs par le nombre de ces valeurs. La moyenne est notée $\overline{m}$ *.*

Exemple : La moyenne des notes d'un trimestre : la somme de toutes les notes divisée par le nombre de notes détermine la moyenne du trimestre.

Dans le cas de grand nombre de valeurs, on multiplie chaque valeur par l'effectif correspondant. On dit que chaque valeur ***est pondérée*** *par son effectif. Elle a plus <u>de poids</u> lorsque l'effectif est important.*
On peut dire dans ce cas que l'on calcule une ***moyenne pondérée****.*

<u>En pratique</u> :
- *on effectue le produit de chaque valeur par l'effectif correspondant*
- *on ajoute les différents produits*
- *on divise par l'effectif total*

On pourra par exemple remplir le tableau suivant :

Catégorie	***Effectif***	***Valeur (âge) × effectif***
10 ans	*11*	*110*
11 ans	*43*	*473*
12 ans	*52*	*624*
13 ans	*58*	*754*
14 ans	*78*	*1092*
15 ans	*33*	*495*
16 ans	*9*	*144*
17 ans	*2*	*34*
TOTAL	***286***	***3726***

Donc $\cancel{m} = \frac{3\,726}{286} \approx 13{,}0$*. L'<u>âge moyen des élèves</u> de ce collège est environ de 13 ans.*

EXERCICES

Exercice 1

L'examen d'entrée dans une école d'électronique comporte trois épreuves notées chacune sur 20 et affectées de coefficients :

- *mathématiques : coefficient 4 ;*
- *physique : coefficient 3 ;*
- *français : coefficient 2.*

Pour être reçu à cet examen, il faut obtenir une moyenne sur 20 supérieure ou égale à 10.

1) Alain a obtenu 10 en mathématiques, 12 en physique et 8 en français. Est-il reçu ? Justifier la réponse.

2) Lise a obtenu 8 en mathématiques et 11 en français.

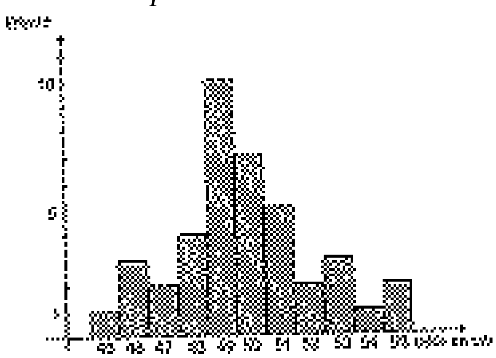
Quelle doit être sa note minimale en physique pour être reçue ?

3) Julien a obtenu 10 en physique. Sa note en mathématiques est le double de sa note en français. Sa moyenne est 10.

Quelles sont ses notes de mathématiques et de français ?

Exercice 2

Dans une maternité, on mesure la taille des nouveau-nés. L'histogramme ci-dessous illustre la répartition des 40 nouveau-nés selon leur taille.



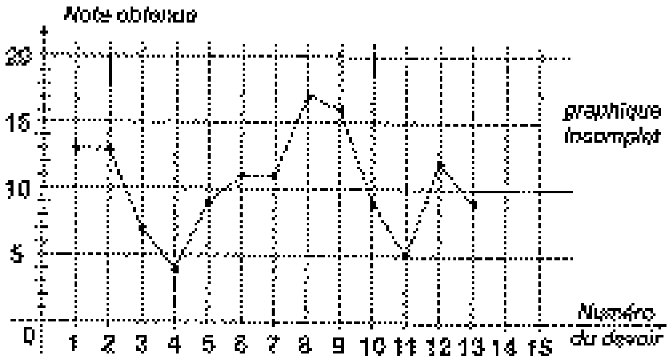
1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Taille en cm	*45*	*46*	*47*	*etc...*
Effectif		*3*		
Fréquence en %				

2) Calculer pour cette période, la taille moyenne des nouveau-nés.

Exercice 3

Un élève a reporté sur le graphique ci-après les notes de ses devoirs. Il a oublié d'y inscrire ses deux dernières notes : 12 et 16.



Soit n la note obtenue à un devoir.

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Note obtenue	$0 \leq n \leq 5$	$5 < n \leq 10$	$10 < n \leq 15$	$15 < n \leq 20$	*nb total de devoirs*
Nombre de devoirs			*6*		*15*

2) Calculer le pourcentage de devoirs ayant obtenu la note n, telle que $10 < n \leq 15$.

Exercice 4

Le tableau suivant représente la répartition des notes obtenues par les élèves d'une classe lors d'un contrôle.

Note n	$0 \leq n < 5$	$5 \leq n < 10$	$10 \leq n < 15$	$15 \leq n < 20$
Effectif	*2*	*8*	*11*	*5*

1) Représenter sur la copie cette répartition par un diagramme en barres.
On prendra :

- *horizontalement : 2 cm pour 5 points;*
- *verticalement : 0,5 cm pour 1 élève.*

2) Calculer le pourcentage des élèves de la classe qui ont une note supérieure ou égale à 10 arrondir à 0,1 % près.

Exercice 5

L'histogramme ci-dessous donne les âges des adhérents d'un club de natation.

1) Combien d'adhérents compte ce club ?
2) Reproduire et compléter le tableau ci-après :

Âge	12
Effectif	2
Fréquence	8 %

3) Quel est l'âge moyen des adhérents de ce club ?

Exercice 6

Lors de la correction d'un examen, les notes de 24 copies corrigées sont relevées pour être représentées à l'aide d'un histogramme.
Voici les 24 notes relevées :
14,5 - 13 - 8 - 15,5 - 3 - 16 - 10,5 - 7,5 - 10,5 - 12,5 - 5,5 - 6 - 20 4,5 - 11,5 - 16 - 9,5 - 9 - 15,5 - 14,5 - 4,5 - 16 - 16 - 9,5
1) Reporter d'abord les résultats par classes selon le tableau ci-après.
2) Représenter les résultats à l'aide d'un histogramme des effectifs.
3) Calculer les fréquences en pourcentage (arrondir à l'entier le plus proche) et les reporter dans le tableau.

Classes	Effectifs	Fréquences en pourcentages
$0 \leq$ note < 4		
$4 \leq$ note < 8		
$8 \leq$ note < 12		
$12 \leq$ note < 16		
$16 \leq$ note ≤ 20		

Exercice 7

Lors d'un concours de pêche, on a pesé les poissons de chaque pêcheur, puis on a réparti les résultats de la façon suivante :

Masse x en grammes	$0 < x \leq 500$	$500 < x \leq 1\,000$	$1\,000 < x \leq 1\,500$	$1\,500 < x \leq 2\,000$	$2\,000 < x \leq 2\,500$
Nombre de pêcheurs	20	10	6	1	3

1) Quel est le nombre de pêcheurs ayant participé au concours ?
2) a) Quel est le nombre de concurrents ayant pêché plus de 1 500 grammes ?
b) Quel est le nombre de concurrents ayant pêché au plus 1 000 grammes ?
3) Calculer le pourcentage des concurrents ayant pris une masse x de poisson telle que : $1000 < x \leq 1500$.

Exercice 8

Le tableau ci-dessous donne la répartition, à la rentrée 95, des 250 élèves de sixième d'un collège, suivant leur année de naissance.
Recopier et compléter le tableau sur votre feuille.

Année de naissance	Nés en 1982 ou avant	Nés en 1983	Nés en 1984	Nés en 1985	Total
Effectif		55		5	
Pourcentage	24		52		

Exercice 9

Un professeur a consigné les moyennes de ses élèves de 3ème dans le tableau suivant :

Moyenne m	$0 \leq m \leq 5$	$5 < m \leq 10$	$10 < m \leq 15$	$15 < m \leq 20$
Effectif	3	6	18	3
Fréquence en %				

1. Quel est l'effectif total de cette classe ?
2. Reproduire le tableau et le compléter en calculant les fréquences.
3. Quel est le pourcentage des élèves ayant au plus 15 de moyenne ?

Exercice 10

Une enquête, réalisée sur un échantillon de 30 enfants, porte sur le temps passé devant la télévision à leur retour de l'école entre 17 h 30 et 19 h 30.
La répartition est donnée dans le tableau ci-dessous :

Temps t en heures	$0 \leq t < 0,5$	$0,5 \leq t < 1$	$1 \leq t < 1,5$	$1,5 \leq t < 2$
Nombre d'enfants	12	9	6	3

1)Douze enfants passent moins d'une demi-heure devant la télévision. Quel pourcentage du groupe de 30 enfants représentent-ils ?
2)Combien d'enfants passent moins d'une heure devant la télévision ?
3)Combien d'enfants passent au moins une heure devant la télévision ?

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1

Alain : $\frac{10 \times 4 + 12 \times 3 + 8 \times 2}{9} = \frac{92}{9} > 10$ *. Alain est reçu.*

Lise : il faut que son total de points soit supérieur à 90. Si x est sa note de Physique :

$8 \times 4 + 11 \times 2 + x \times 3 \geq 90$

$3x + 54 \geq 90$

$3x \geq 36$ donc $\mathbf{x \geq 12}$

Julien : il a déjà 30 points de par sa note de Physique; il manque 60 points qui proviendront d'une note x en français, et 2x en math.

$2 \times x + 4 \times 2x = 60$ d'où $8x = 60$, donc $x = 6$ et $2x = 12$

Exercice 2

Taille en cm	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
Effectif	1	3	2	4	10	7	5	2	3	1	2
Fréquence en %	2,5	7,5	5	10	25	17,5	12,5	5	7,5	2,5	5

La moyenne est de 49,775 cm.

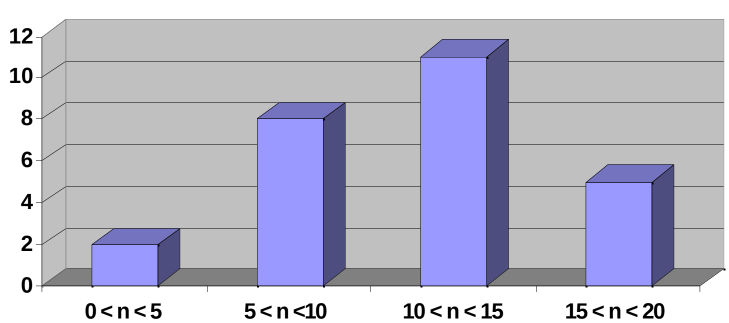
Exercice 3

Note obtenue	$0 \leq n \leq 5$	$5 < n \leq 10$	$10 < n \leq 15$	$15 < n \leq 20$	nb total de devoirs
Nombre de devoirs	2	4	6	3	15

pourcentage de devoirs ayant obtenu la note n, telle que $10 < n \leq 15$: $\frac{6}{15} = 40\%$

Exercice 4

Note n	$0 \leq n < 5$	$5 \leq n < 10$	$10 \leq n < 15$	$15 \leq n < 20$
Effectif	2	8	11	5



Pourcentage des élèves de la classe qui ont une note supérieure ou égale à 10 arrondir à 0,1 % près. : $\frac{16}{26} \approx 61,5$ %

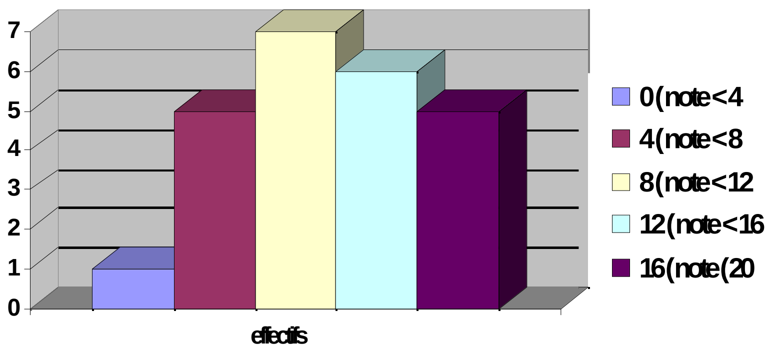
Exercice 5

âge	12	13	14	15	16	17	total
effectif	2	3	7	5	4	4	25
fréquence	8%	12%	28%	20%	16%	16%	100%

Âge moyen : 14,72 ans soit environ 14 ans et 8 mois et demi

Exercice 6

Classes	effectifs	Fréquences
$0 \leq$ note < 4	1	4%
$4 \leq$ note < 8	5	21%
$8 \leq$ note < 12	7	29%
$12 \leq$ note < 16	6	25%
$16 \leq$ note ≤ 20	5	21%



Exercice 7

1) Nombre de pêcheurs ayant participé au concours : 40

2) a) Nombre de concurrents ayant pêché plus de 1 500 grammes : 4

b) Nombre de concurrents ayant pêché au plus 1 000 grammes 30

3) Pourcentage des concurrents ayant pris une masse x : $1000 < x \leq 1500$: $\frac{6}{40} = 15\%$

Exercice 8

Année de naissance	Nés en 1982 ou avant	1983	1984	1985	total
Effectif	60	55	130	5	250
Pourcentage	24	22	52	2	100%

Exercice 9

moyenne m	entre 0 et 5	entre 5 et 10	entre 10 et 15	entre 15 et 20	total
Effectif	3	6	18	3	30
Pourcentage	10%	20%	60%	10%	100%

pourcentage des élèves ayant au plus 15 de moyenne : 90%

Exercice 10

1)Pourcentage du groupe de 30 enfants: $\frac{12}{30} = 40\%$

2)'enfants passent moins d'une heure devant la télévision ? 21

3)enfants passent au moins une heure devant la télévision ? 9