Systèmes d'équations

Définition :

Exemple :

2 x + 1 = 3 est une équation à une inconnue.
Résoudre l'équation, c'est trouver x pour que l'égalité soit vraie.
Cette équation a une solution unique x =1.

2 y + 4 x = 8 est une équation à 2 inconnues (x et y)
Résoudre l'équation, c'est trouver les valeurs de x et y pour que l'égalité soit vraie.

$2y + 4x = 8$

$y + 2x = 4$

$y = -2x + 4$

On reconnaît l'équation d'une droite. Tous les points de la droite ont des coordonnées qui sont solutions de l'équation. Ex (1 ; 2) ou (-2 ; 8)…
Cette équation a une infinité de solutions.

$\begin{cases} 6y + 2x = 12 \\ -2y - 5x = 7 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues. Chaque équation correspond à une droite. Si les droites ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point dont les coordonnées sont solutions du système.

II. Méthodes de résolutions

1) Méthode par substitution :

Ex : $\begin{cases} y + 3x = 5 \\ 3y - 4x = 8 \end{cases}$

Cette méthode est très efficace, quand l'une des inconnues est « toute seule ». On isole alors cette inconnue, et on la remplace dans l'autre équation.

$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 3(5 - 3x) - 4x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 15 - 9x - 4x = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ -13x = 8 - 15 = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x = \frac{7}{13} \end{cases}$$

Quand on a trouver une inconnue, on la remplace dans la première équation pour trouver l'autre :

$$y = 5 - 3x = 5 - 3 \times \frac{7}{13} = \frac{5}{1} - \frac{21}{13} = \frac{65 - 21}{13} = \frac{34}{13}$$

La solution du système est donc $\left(\frac{7}{13};\frac{34}{13}\right)$

2) Méthode par combinaison :

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$$

On veut faire « disparaître » une inconnue. Par exemple x.
On multiplie la 1ère équation par 2 et la 2ème par 3.

$$\begin{cases} 6x+4y=8 \\ 6x+15y=3 \end{cases}$$

Ainsi, on « a » 6 x dans les 2 équations.
On garde la 1ère équation, et on soustrait la 2ème équation de la 1ère.

$$\begin{cases} 6x+4y=8 \\ 6x+4y-(6x+15y)=8-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+4y=8 \\ -11y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+4y=8 \\ y=-\dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Quand on a trouvé y on le remplace dans la 1ère équation pour trouver x

III. Problèmes :

Principe : on procède en 5 étapes, comme pour les problèmes à 1 inconnue.
Dans la 1ère étape, on désigne 2 inconnues x et y

Exercice 1 : (Lille 1995) (3 points)
Chez un confiseur, une dame achète des chocolats au détail :
- chaque chocolat blanc est vendu 2 F et pèse 20 g ;
- chaque chocolat noir est vendu 3 F et pèse 35 g.

Cette dame paye 84 F pour 900 g.
Déterminer le nombre de chocolats de chaque sorte.