1 Système de deux équations à deux inconnues

1.1 Equation à deux inconnues

$3x + 2y = 8$ est une équation a deux inconnues x et y.

Un couple de nombre $(x\,;y)$ est solution de cette équation si on a effectivement $3x + 2y = 8$.

Exemples :

(2 ;1) est une solution car $3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
(1 ;2) n'est pas solution car $3 \times 1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$
(0 ;4) est aussi une solution car $3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

On peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser par le même nombre chaque membre de l'équation. On obtient une équation dite équivalente qui a les mêmes solutions.

Exemples :

$3x + 2y = 8$ est équivalente à $3x = 8 - 2y$

$6x + 4y = 16$

$2y = 8 - 3x$

$x = \dfrac{8 - 2y}{3}$ On a exprimé x en fonction de y.

$y = \dfrac{8 - 3x}{2}$ ou $y = 4 - \dfrac{3}{2}x$ On a exprimé y en fonction de x

(on trouve ainsi une application affine de coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$, d'ordonnée à l'origine 4).

Il existe donc une infinité de solutions a une équation à deux inconnues. A chaque choix de x correspond un y calculé par la formule $y = \dfrac{8 - 3x}{2}$

1.2 Système d'équations à deux inconnues

$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

Un couple de nombres est solution du système s'il est solution des deux équations à la fois.

Exemple :
(2 ;1) est une solution de $3x + 2y = 8$ mais pas de $x - 5y = 2$ car $2 - 5 \times 1 = -3$ donc (2 ;1) n'est pas une solution du système.

1.3 Résolution d'un système

Pour résoudre un système on peut utiliser des équations équivalentes.

<u>Méthode par substitution</u>

Dans l’une des deux équations on exprime l’une des inconnues en fonction de l’autre. On choisit l’équation et l’inconnue qui permettent de faire des calculs « simples ». Ici la deuxième inconnue, et x en fonction de y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$ on remplace alors dans la première équation x par l’expression trouvée dans la seconde.

$$\begin{cases} 3\,(2 + 5y) + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$ On résout la première équation qui n’a plus qu’une seule inconnue.

$$\begin{cases} 3 \times 2 + 3 \times 5y + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 + 15y + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 + 17y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17y = 2 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{2}{17} \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$ on remplace ensuite, dans la seconde équation, y par $\frac{2}{17}$

$$\begin{cases} y = 2/17 \\ x = 2 + 5 \times \dfrac{2}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{2}{17} \\ x = 2 + 10/17 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{2}{17} \\ x = \dfrac{44}{17} \end{cases}$$

On vérifie alors que $(\frac{44}{17};\frac{2}{17})$ est bien une solution des deux équations

$$2 \times \frac{44}{17} + 2 \times \frac{2}{17} = \frac{132}{17} + \frac{4}{17} = \frac{136}{17} = 8$$

$$\frac{44}{17} - 5 \times \frac{2}{17} = \frac{44}{17} - \frac{10}{17} = \frac{34}{17} = 2$$

On conclut par une phrase : $(\frac{44}{17};\frac{2}{17})$ est la solution du système.

<u>Méthode par élimination</u>

Souvent utilisée quand l’expression d’une inconnue en fonction d’une autre n’est pas «simple».

$\begin{cases} 5x + 7y = 17 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ On utilise des équations équivalentes pour que les coefficients de x(ou de y) soient les mêmes dans les deux équations. Ici on peut multiplier les membres de la première équation par 3 et ceux de la seconde par 5.

$\begin{cases} 15x + 21y = 51 \\ 15x + 10y = 40 \end{cases}$ On soustrait au premier membre de la première équation le premier membre de la seconde équation ; même chose avec le second membre. Ainsi on obtient une équation sans x. On utilise une des deux équations de départ pour conclure.

$\begin{cases} 11y = 11 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ 3x + 2 \times 1 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ 3x = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

On vérifie :

$5 \times 2 + 7 \times 1 = 10 + 7 = 17$
$3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$

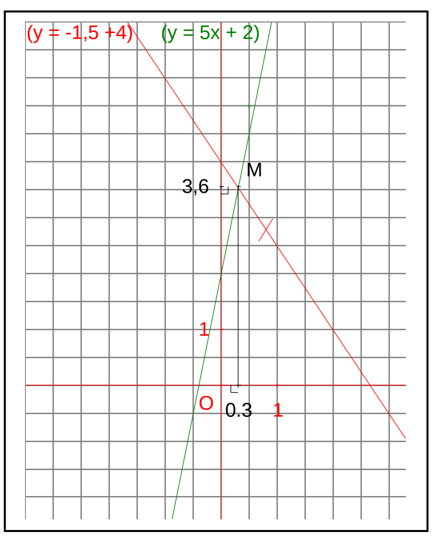
(2 ;1) est la solution du système.

1.4 Interprétation graphique

$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$ en exprimant y en fonction de x dans chacune des équations on obtient :

$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 4 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ cela correspond à deux applications affines. Si l'on considère leurs représentations graphiques et la solution (x ;y) de ce système comme un point M (*x* ;*y*), M doit appartenir à la fois à la droite d'équation

$y = -\dfrac{3}{2}x + 4$ et à la droite d'équation $y = 5x + 2$. C'est donc leur intersection. On peut ainsi lire graphiquement une approximation de la solution du système.



Une solution <u>approximative</u> du système est (0.3 ;3.6)