Théorème de Thalès - Démonstration.

***1°) Lemme 1*[i]**

Soit (D) et (D') deux droites parallèles. A et B sont deux points de (D). E et F sont deux points de (D').

La perpendiculaire à (D) passant par E coupe (D) en H et la perpendiculaire à (D) passant par F coupe (D) en G.

a) Montrer que EFGH est un rectangle. En déduire que EH = FG

b) Montrer que EAB et FAB ont la même aire.

c) Rédiger le théorème démontré sous la forme :

"Si deux triangles ont un côté commun et …………………… , alors ils ont la même aire.

2°)Lemme 2

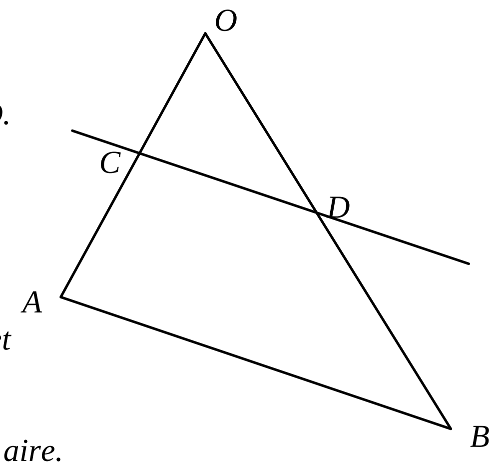
Montrer que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *, alors* $\frac{a+c}{b+d}$ *est un troisième rapport égal aux deux premiers.*

3°) Le théorème de Thalès :

OAB est un triangle.

Une droite parallèle à (AB) coupe [OA] en C et [OB] en D.

Il s'agit de démontrer que $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$



a) Déduire de la question 1°) que les triangles ACD et BCD ont la même aire.

b) En déduire que les triangles ODA et OCB ont la même aire.

c) En exprimant les aires de chacun de ces trois triangles, utiliser l'égalité $\frac{\text{Aire de } OCD}{\text{Aire de } OAD} = \frac{\text{Aire de } OCD}{\text{Aire de } OCB}$ *pour montrer que :* $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$

d) La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (CD) en I et (AB) en J. Montrer en s'inspirant des questions précédentes que $\frac{OI}{OJ} = \frac{DI}{BJ}$ *d'une part, et que* $\frac{OI}{OJ} = \frac{CI}{AJ}$ *d'autre part.*

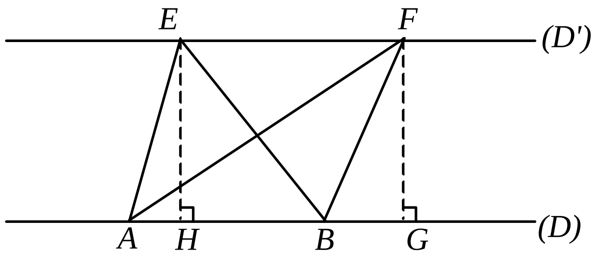
e) En utilisant le lemme 2 et la conclusion de la question c), en conclure que $\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$

[i] Proposition démontrée nécessaire à la suite du raisonnement

La démonstration complète :

1°) Lemme 1 : triangles de même aire:

(D) // (D') ; (EH) ⊥ (D) ; (FG) ⊥ (D).



EFGH est un rectangle car ses côtés sont parallèles deux à deux et il a au moins deux angles droits.
*Donc ses côtés opposés ont même longueur; en particulier : **EH = FG**.*
EH est la hauteur relative à [AB] dans le triangle EAB et FG est la hauteur relative à [AB] dans le triangle FAB.
L'aire du triangle ne dépend que de la longueur du côté et de la longueur de la hauteur relative à ce côté; Pour les deux triangles EAB et FAB, ces longueurs sont égales, donc ils ont la même aire.
Conclusion :
Si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun , alors ils ont la même aire.

2°) Lemme 2 : rapports égaux :

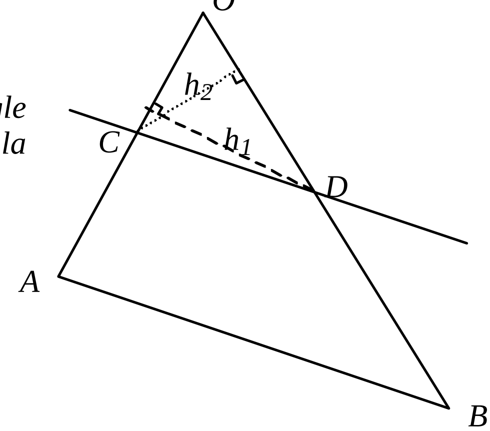
si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, alors ad = bc (produits en croix)*
Si ad = bc , alors ad + cd = bc + cd (on ajoute un même nombre aux deux membres)
D'où (après factorisation) : d(a + c) = c(b + d).
Et en appliquant inversement la règle des produits en croix : $\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$

Conclusion :
Si $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$***, alors*** $\boldsymbol{\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$.

Remarque : On montrerait de la même manière que : Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, alors* $\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

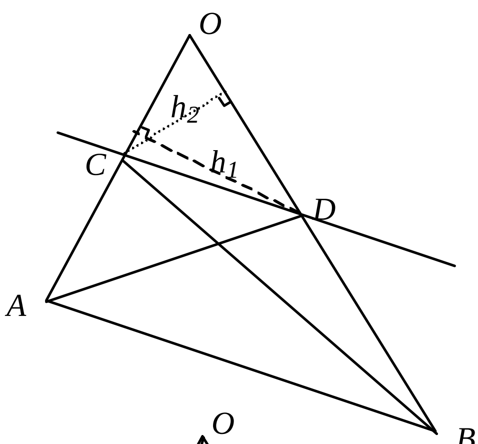
3°) Le théorème de Thalès :

(CD) // (AB)
"Si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun , alors ils ont la même aire".
Donc les triangles ACD et BCD ont la même aire.



En ajoutant à chacune de ces deux aires celle du triangle OCD, on obtient que les triangles ODA et OCB ont la même aire.
On en déduit que : $\frac{\text{Aire de OCD}}{\text{Aire de OAD}} = \frac{\text{Aire de OCD}}{\text{Aire de OCB}}$

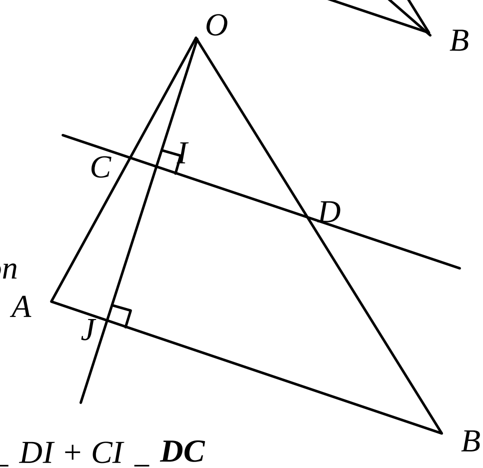
Soit h_1 *la hauteur issue de D dans le triangle OCD.*
Et h_2 *la hauteur issue de C dans le triangle OCD.*



$$\frac{\text{Aire de } OCD}{\text{Aire de } OAD} = \frac{OC \times \frac{h_1}{2}}{OA \times \frac{h_1}{2}} = \frac{OC}{OA} \text{ (en simplifiant par } \frac{h_1}{2}\text{)}$$

$$\frac{\text{Aire de } OCD}{\text{Aire de } OCB} = \frac{OD \times \frac{h_2}{2}}{OB \times \frac{h_2}{2}} = \frac{OD}{OB} \text{ (en simplifiant par } \frac{h_2}{2}\text{)}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}}$



d) Les triangles IJD et IDB ont la même aire (lemme 1)
Donc les triangles OJD et OIB ont la même aire.

Aire OJD = $\frac{1}{2} \times OJ \times DI$ *; Aire OIB =* $\frac{1}{2} \times OI \times BJ$

D'où : $OJ \times DI = OI \times BJ$ *et* $\boldsymbol{\frac{OI}{OJ} = \frac{DI}{BJ}}$

De la même manière dans les triangles OIA et OCJ , on obtient : $\boldsymbol{\frac{OI}{OJ} = \frac{CI}{AJ}}$

D'après le lemme 2 , si $\frac{OI}{OJ} = \frac{DI}{BJ} = \frac{CI}{AJ}$ *, alors* $\boldsymbol{\frac{OI}{OJ}} = \frac{DI}{BJ} = \frac{CI}{AJ} = \frac{DI + CI}{BJ + AJ} = \boldsymbol{\frac{DC}{AB}}$

D'après la question c) appliquée aux triangles OJA et OIC , OJB et OID : $\frac{OI}{OJ} = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$

<u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB}}$