

Exercice : (Caen 96)

- 1) Construire un triangle ABC tel que :
 $AB = 3,5 \text{ cm}$; $AC = 5 \text{ cm}$; $BC = 4 \text{ cm}$.
- 2) Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$.
- 3) Construire le point E symétrique de B par rapport à C.
- 4) Quelle est la nature du quadrilatère ABDE ? Justifier la réponse.

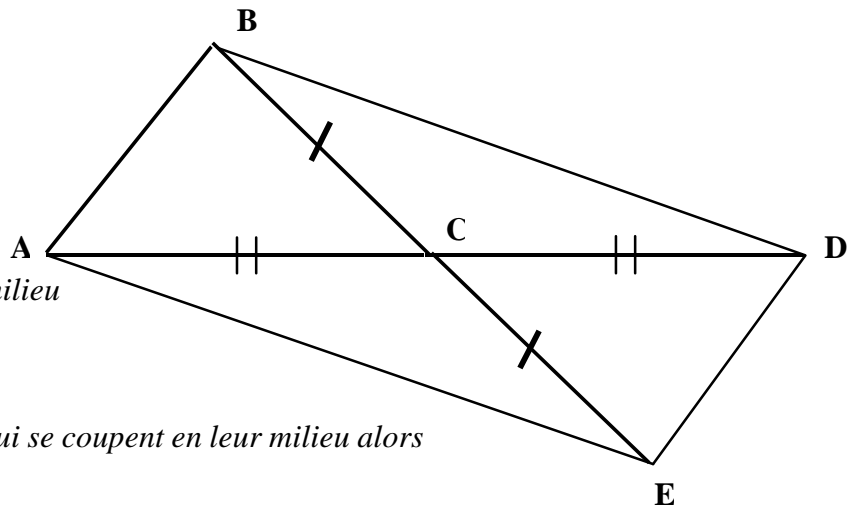
Correction:

- 1)
- 2) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$ donne $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$
donc C milieu de [AD].
- 3) E symétrique de B par rapport à C
donc C milieu de [BE].
- 4) D'après 2) et 3), le point C est le milieu
des segments [BE] et [AD].

Ces segments sont les diagonales
du quadrilatère ABDE.

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors
c'est un parallélogramme.

Donc ABDE est un parallélogramme.



Exercice : (Scandinavie 95)

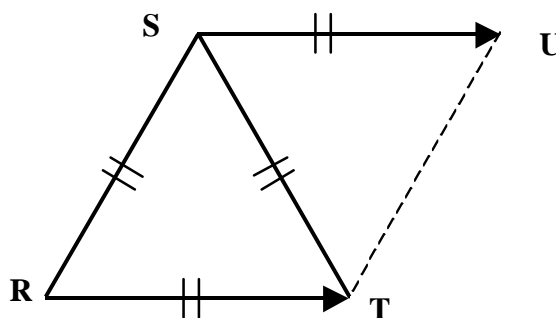
RST est un triangle équilatéral de 4 cm de côté.

U est le point tel que : $\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RT}$.

1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Quelle est la nature exacte du quadrilatère RSUT ? Justifier la réponse.

Correction:

- 1) $\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RT}$ donc le quadrilatère RSUT est un parallélogramme.



- 2) RSUT est un parallélogramme d'après 1).

On $RT = RS$ car le triangle RST est équilatéral.

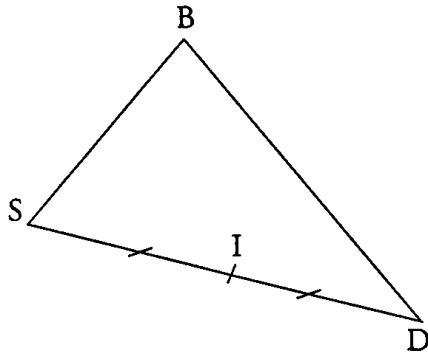
Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Donc le quadrilatère RSUT est un losange.

Remarque: ce ne peut pas être un carré puisque l'angle au sommet R est de 60° .

Exercice _____ : (Clermont 98)

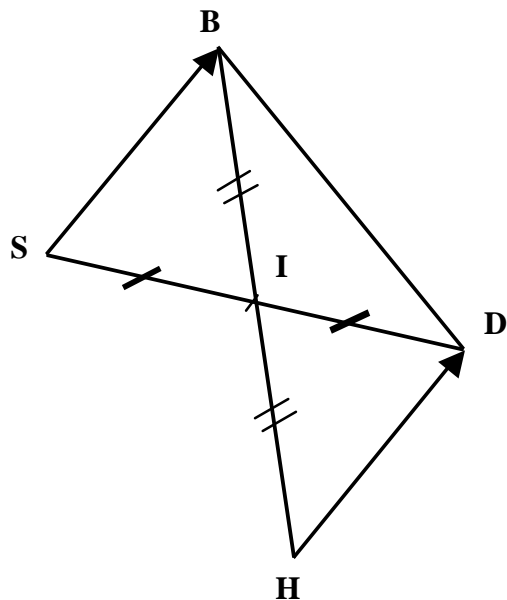
Sur la figure ci-après, on a mis en place un triangle BDS ainsi que le milieu I du segment [SD]. Les constructions demandées dans cet exercice seront faites sur cette figure.



1. a) Construire le point H, symétrique du point B par rapport à I.
b) Démontrer que $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{SB}$.
2. Construire le point R, image du point D dans la translation de vecteur \overrightarrow{SB} .
3. Démontrer que le point D est le milieu du segment [HR].

Correction:

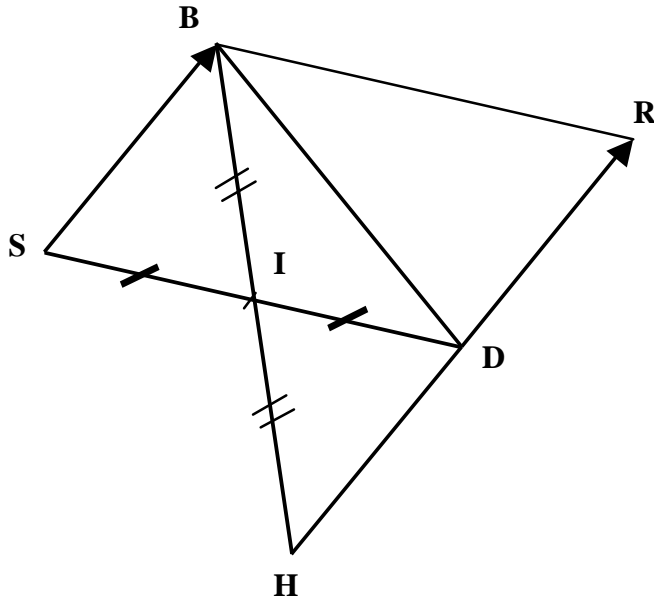
1) a)



b) *I est le milieu du segment [SD].
H est le symétrique de B par rapport à I donc le point I est aussi le milieu du segment [HB].
Ces segments se coupent en leur milieu et ce sont les diagonales du quadrilatère SBDH.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
Donc SBDH est un parallélogramme.*

On a alors $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{SB}$.

2) Le point R est l'image de D par la translation de vecteur \overrightarrow{SB} alors le quadrilatère SBRD est un parallélogramme: ce qui nous donne la méthode de construction du point R.



3) D'après 2), on a $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{SB}$ et d'après 1) b), on a $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{SB}$.
Ces deux égalités donnent $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DR}$.
Par suite, le point D est le milieu du segment [HR].

Exercice : (Polynésie 99)

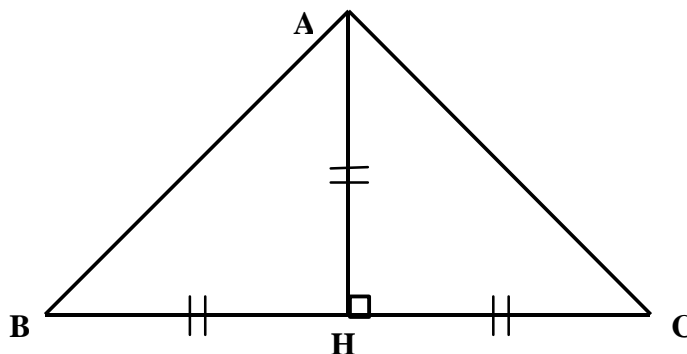
ABC est un triangle isocèle en A et [AH] est la hauteur issue de A.

On donne AH = 4, BC = 8.

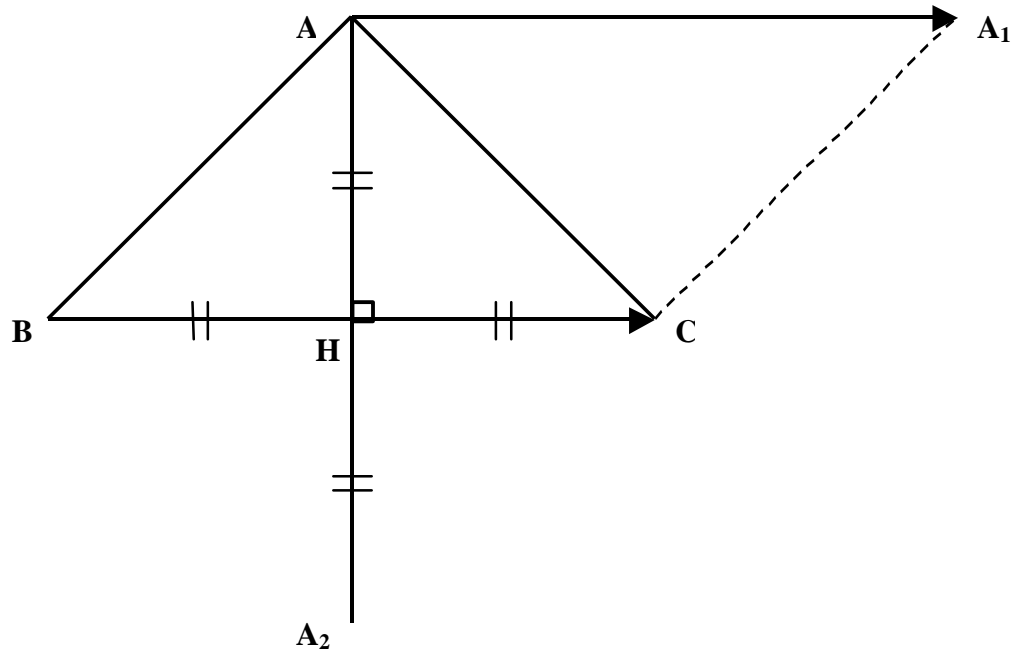
1. Construire le triangle ABC en vraie grandeur.
2. Construire le point A₁, image de A par la translation de vecteur \overrightarrow{BC} .
3. Construire le point A₂, symétrique de A par rapport à la droite (BC).
4. a) Démontrer que AA₁ = AA₂.
b) Calculer l'angle A₂ÂA₁.
c) En déduire une double propriété du triangle A₂AA₁.

Correction:

1) ABC est isocèle en A donc la hauteur issue de A est aussi une médiane du triangle donc H est le milieu du segment [BC] avec HB=HC=HA.



2) Le point A_1 est l'image de A par la translation de vecteur \overrightarrow{BC} alors le quadrilatère $ABCA_1$ est un parallélogramme: ce qui nous donne la méthode de construction du point A_1 .



3) On doit avoir (BC) médiatrice du segment $[AA_2]$ or la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC) donc le point A_2 est sur la droite (AH) avec $HA_2=4$.

4) a) On a H milieu du segment $[AA_2]$ donc $AA_2 = 2AH = 8$.

D'après 1), le quadrilatère $ABCA_1$ est un parallélogramme.

Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur donc, en particulier, $AA_1=BC=8$.

On a donc $AA_1 = AA_2$.

b) D'après 1), le quadrilatère $ABCA_1$ est un parallélogramme.

Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles. En particulier, les droites (AA_1) et (BC) sont parallèles.

De plus, la droite (BC) étant la médiatrice du segment $[AA_2]$, les droites (BC) et (AA_2) sont perpendiculaires.

Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Ici, les droites (AA_1) et (AA_2) sont donc perpendiculaires donc $\widehat{A_2AA_1} = 90^\circ$.

c) Avec 4) a), le triangle A_2AA_1 est isocèle en A et d'après 4) b), il est rectangle en A .

Donc le triangle A_2AA_1 est isocèle et rectangle en A .

Remarque: le quadrilatère ABA_2C a ses diagonales se coupant en leur milieu H , même longueur et sont perpendiculaires : il s'agit d'un carré et le triangle ABC est donc aussi rectangle et isocèle en A .

Exercice _____ :

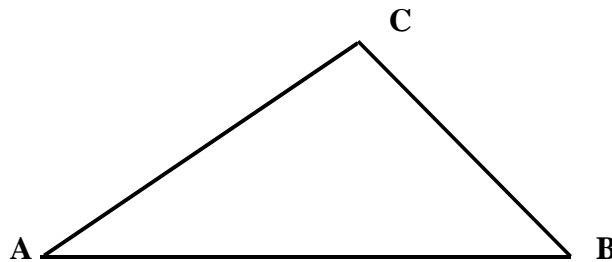
L'unité de longueur choisie dans le plan est le centimètre.

On considère un triangle ABC tel que : $AB = 7$; $AC = 5$; $BC = 4$.

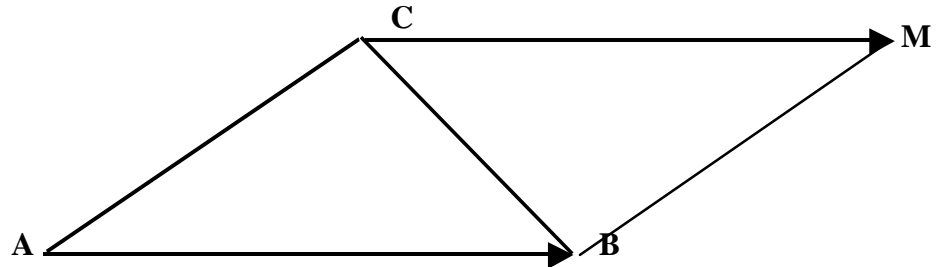
- 1) Construire le triangle ABC en vraie grandeur sur votre copie.
- 2) Construire le point M image du point C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
- 3) Construire le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Correction:

1)



2) Le point M est l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} alors le quadrilatère ABMC est un parallélogramme: ce qui nous donne la méthode de construction du point M.



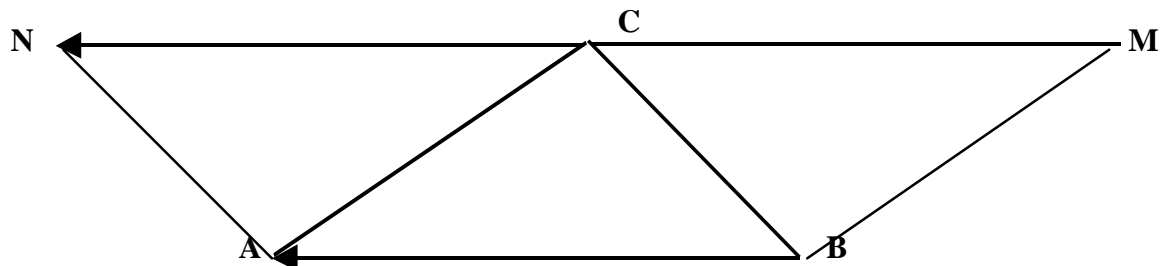
3)

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad \text{donne} \quad \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BA} \quad \text{d'après la relation de Chasles.}$$

Donc BANC est un parallélogramme ce qui fournit la construction du point N.



Exercice _____ : (Japon 97)

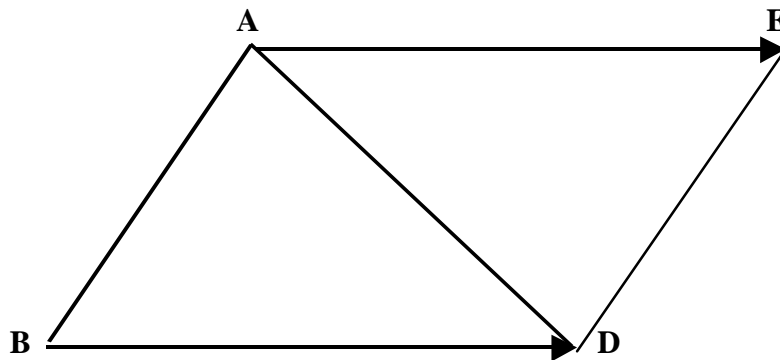
L'unité est le centimètre.

On donne un triangle ABD tel que $AB = 5$, $AD = 6$ et $BD = 7$.

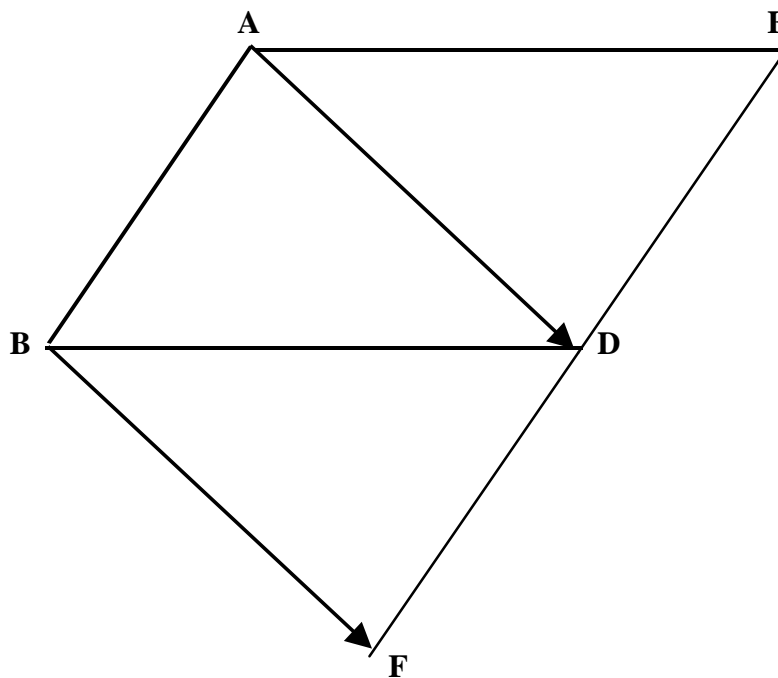
- 1) Construire le point E image du point A par la translation de vecteur \overrightarrow{BD} .
- 2) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.
- 3) Montrer que D est le milieu de [EF].

Correction:

1) Le point E est l'image de A par la translation de vecteur \overrightarrow{BD} alors le quadrilatère BDEA est un parallélogramme: ce qui nous donne la méthode de construction du point E.



2) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ donc BFDA est un parallélogramme ce qui permet de construire le point F:



3) BFDA est un parallélogramme donc $BA = FD$ et les droites (BA) et (FD) sont parallèles.

D'après 1), BDEA est aussi un parallélogramme d'où $BA = DE$ et les droites (BA) et (DE) sont parallèles.

Par un point, il passe une seule droite parallèle à une autre : ici, les droites (FD) et (DE) passent par le point D et sont toutes deux parallèles à la droite (BA). Elles sont donc confondues ce qui signifie que les points F, D et E sont alignés.

De plus on a $FD = BA = DE$ donc $FD = DE$.

Ces deux derniers résultats permettent d'affirmer que le point D est le milieu du segment [EF].

Exercice : (Afrique2 95)

1) Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

2) La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.

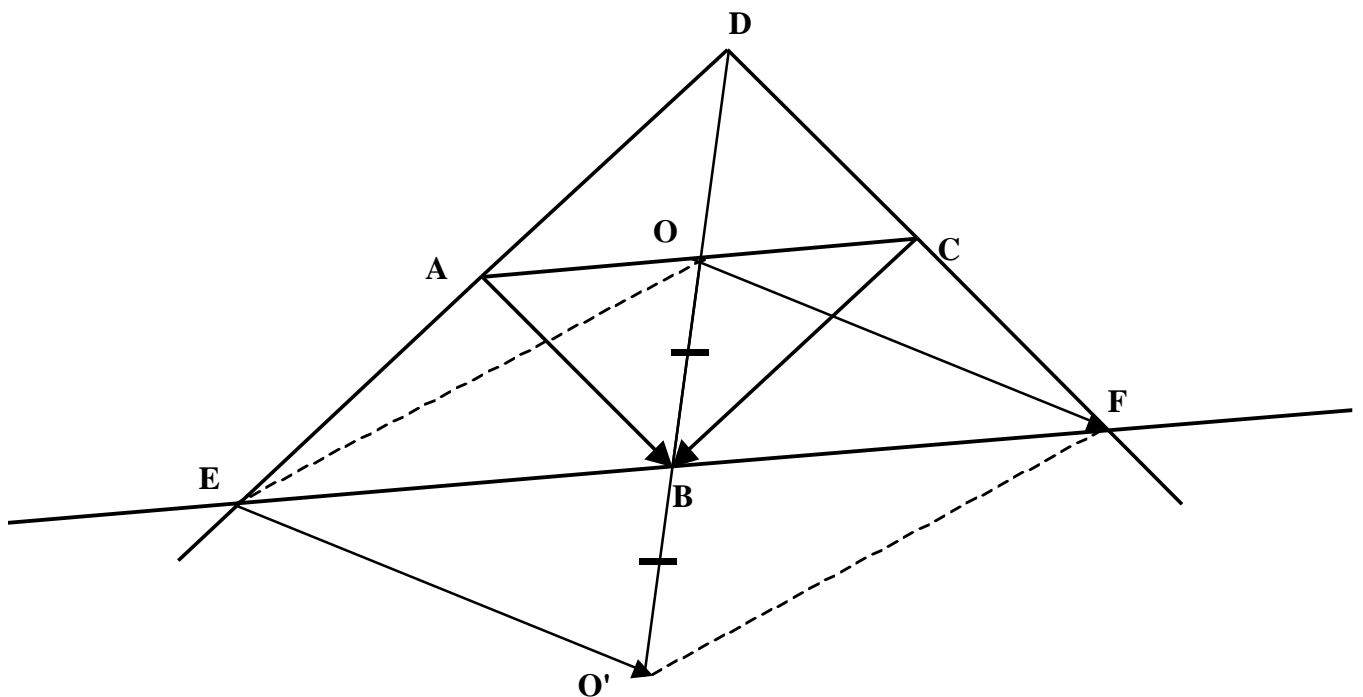
Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.

En déduire que B est le milieu de [EF].

3) On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B.

Démontrer que $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$.

Correction:



1)

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \quad \text{donne} \quad \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \quad \text{d'après la relation de Chasles.}$$

Cette dernière relation permet d'affirmer que le quadrilatère CBAD est un parallélogramme :

on a la construction du point B.

2) Puisque CBAD est un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Or, le point E appartient à la droite (AD) donc les droites (AE) et (BC) sont parallèles.

Par construction, les droites (EB) et (AC) sont aussi parallèles donc ACBE est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles: ACBE est un parallélogramme.

On a alors : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.

De même, on montre que ACFB est un parallélogramme ce qui donne $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.

Ces deux égalités entraînent l'égalité suivante : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

On en déduit que le point B est le milieu du segment [EF].

3) Le point O' est le symétrique de O par rapport à B donc le point B est le milieu du segment [OO']. D'après 2) le point B est aussi le milieu du segment [EF].

Or les segments [OO'] et [EF] sont les diagonales du quadrilatère EOFO'.

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc EOFO' est un parallélogramme.

Par suite, on a : $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$.