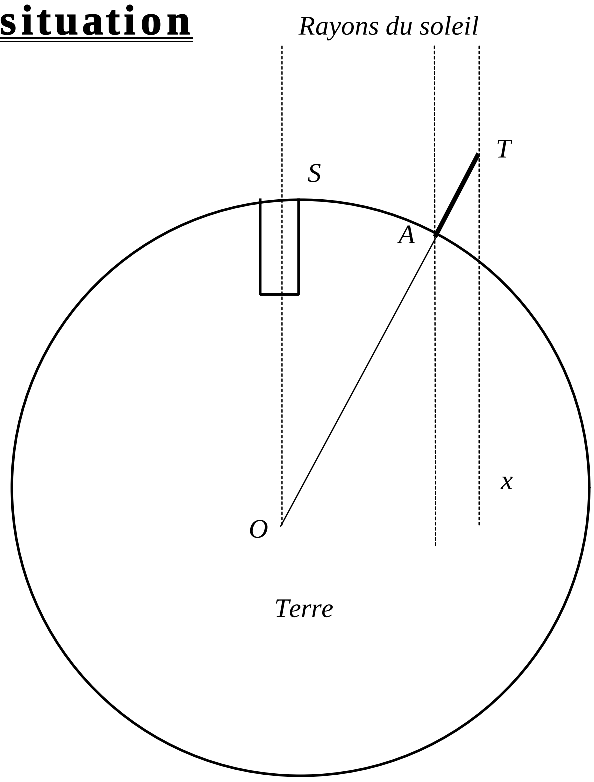
CHAPITRE 5
PROJECTION ET COSINUS

LE CALCUL D'ERATHOSTENE

Vers 250 avant Jésus Christ, Erathostène, célèbre géographe, s'est illustré par le calcul du périmètre de la terre qu'il a réalisé à partir des observations suivantes:
A midi, le jour du solstice d'été, le soleil est à la verticale de Syène, ville d'Egypte aujourd'hui prés d'Assouan. En effet, ce jour-là, à Syène, les rayons du soleil éclairent le fond d'un puits très profond.
Le même jour à Alexandrie, autre ville d'Egypte, le soleil fait un angle d'environ 7,5° avec la verticale. Cette valeur est déterminée grâce à l'ombre d'une tour.
Alexandrie et Syène sont distantes de 830 km environ.
Les deux cités sont à peu près sur le même méridien. Le soleil étant très éloigné, on peut considérer que ses rayons nous parviennent tous parallèles.

Schéma de la situation



Sur le schéma ci-dessus qui ne respecte pas du tout les proportions, on a placé le puits de Syène, la tour d'Alexandrie. La tour verticale et le rayon qui pénètre dans le puits se "rejoignent" au centre de la terre.

a) Pourquoi peut-on dire que les angles $\widehat{SOA}$ et $\widehat{ATx}$ sont égaux ?
b) Compléter le tableau de proportionnalité

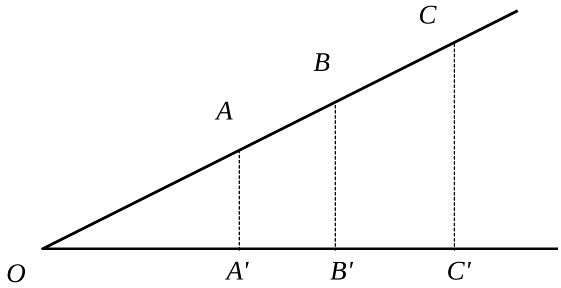
Angle au centre	7,5°	360°
Longueur de méridien	830 km	L

Montrer le calcul permettant d'obtenir L :

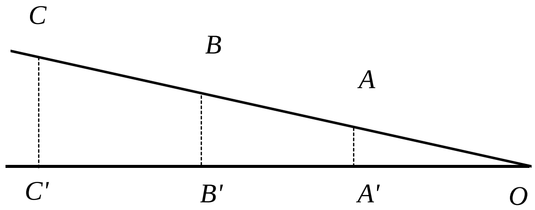
COSINUS D'UN ANGLE AIGU

Ce qu'il faut faire:

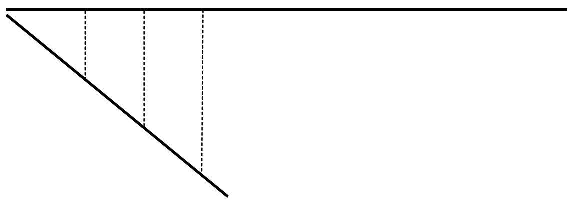
Compléter le tableau des mesures en mesurant sur le dessin avec une règle graduée
Calculer avec la machine les valeurs du nombre k proposé (arrondir au centième); puis calculer la moyenne des trois valeurs de k obtenues.
Mesurer avec un rapporteur les angles formés par les demi-droites dans chaque cas.



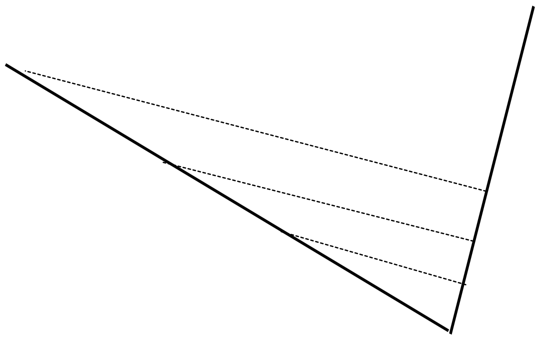
L'	*OA'* =	*OB'* =	*OC'* =
L	*OA* =	*OB* =	*OC* =
$k = \frac{L'}{L}$			
valeur moyenne de k			
angle a			



L'	*OA'* =	*OB'* =	*OC'* =
L	*OA* =	*OB* =	*OC* =
$k = \frac{L'}{L}$			
valeur moyenne de k			
angle a			



L'	*OA'* =	*OB'* =	*OC'* =
L	*OA* =	*OB* =	*OC* =
$k = \frac{L'}{L}$			
valeur moyenne de k			
angle a			



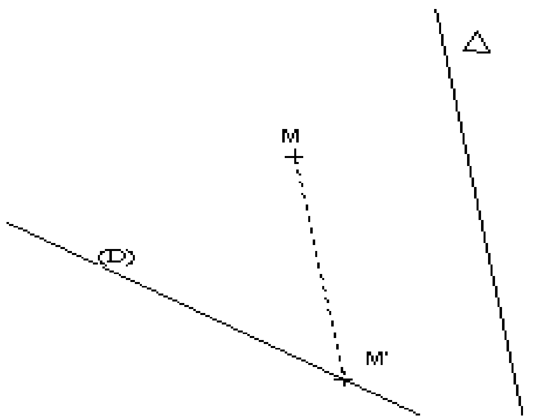
L'	*OA'* =	*OB'* =	*OC'* =
L	*OA* =	*OB* =	*OC* =
$k = \frac{L'}{L}$			
valeur moyenne de k			
angle a			

PROJECTION ; COSINUS D'UN ANGLE AIGU

1. Projection : définition

Pour projeter un point, il faut une direction pour la projection et une droite sur laquelle on projette.

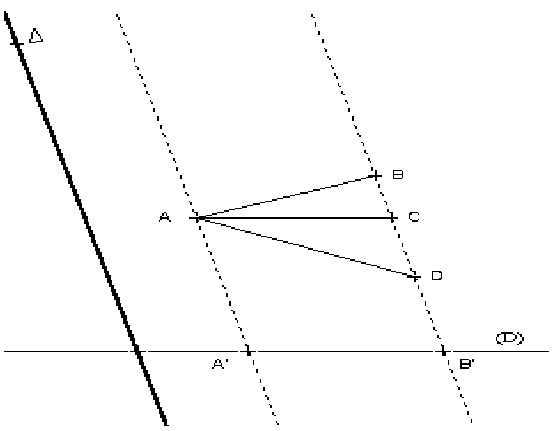
Définition : Le projeté de M sur (D) parallèlement à (D) est le point M' de (D) tel que (MM') // (D).



Remarques :
1. Tout point de la droite (MM') est projeté au même point M'
2. Tout point de (D) est invariant (sa propre image).

2. Effet de la projection sur les longueurs

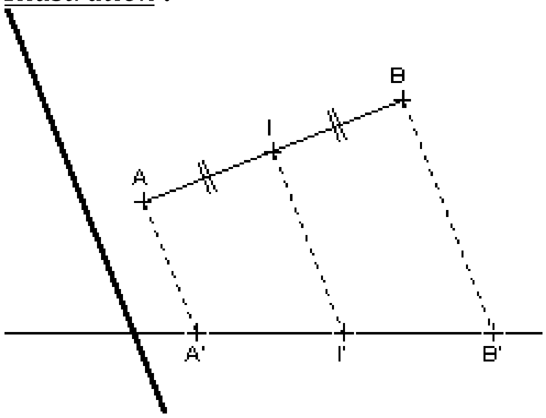
Appelons [AB] le segment initial. A' ***le projeté*** *de A et B' le projeté de B.*
[A'B'] est le projeté du segment [AB].
Si [AB] // (D), A'B' = 0
Si [AB] // (D), A'B' = AB
Dans les autres cas on peut avoir
A'B' < AB ou A'B' > AB.
La projection ne conserve pas les longueurs, mais en général elle les modifie.



3. Enonce des milieux dans le triangle

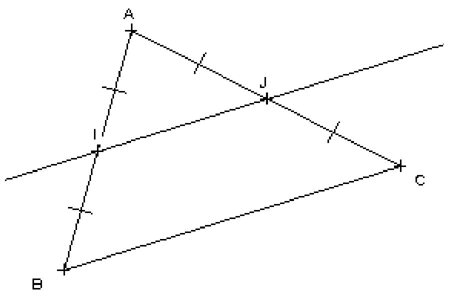
***Propriété**:*
La projection conserve les milieux.

Illustration **:**



Hypothèses	*Conclusion*
I milieu de [AB] *A' projeté de A* *B' projeté de B* *I' projeté de I*	*I' milieu de [A'B']*

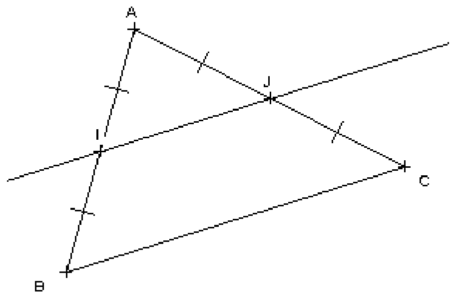
Énoncé des milieux dans le triangle :
Dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.



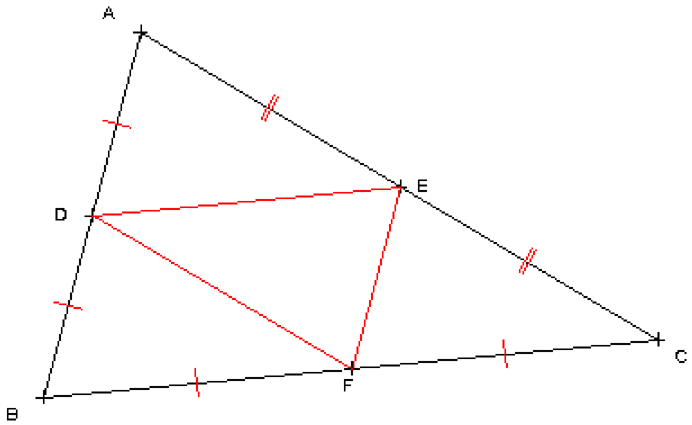
Hypothèses	*Conclusion*
I milieu de [AB] *J milieu de [AC]*	*(IJ) // (BC)*

Réciproque de l'énoncé des milieux dans le triangle:
Dans un triangle, la parallèle à un côté passant par le milieu d'un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Hypothèses	*Conclusion*
I milieu de [AE] *J Î (AC)* *(IJ) // (EC)*	*J milieu de [AC]*



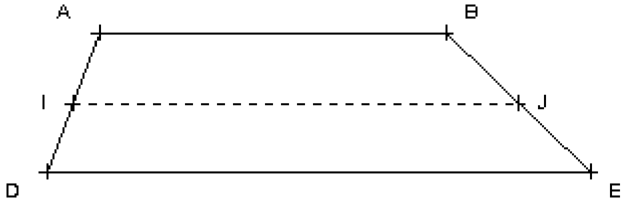
Conséquence :
Lorsque l'on place les trois milieux des côtés d'un triangle, on fait apparaître :
Quatre triangles et trois parallélogrammes.



Les segments joignant les milieux de deux côtés sont parallèles aux troisièmes côtés, donc dans cet exemple : (EF) // (AB) , (DF) // (AC) et (DE) // (BC).
Les quadrilatères AEFD, EDFC et DEFB, ayant leurs côtés parallèles deux à deux sont des parallélogrammes.
Conséquence : DE = BF, EF = AD et DF = AE.

C'est à dire que la longueur du segment qui joint deux milieux est la moitié de celle du troisième côté.

Application de l'énoncé des milieux au trapèze.



Dans un trapèze, la droite passant par les milieux des deux côtés non parallèles est parallèle aux deux autres côtés.

4. Cosinus d'un angle aigu

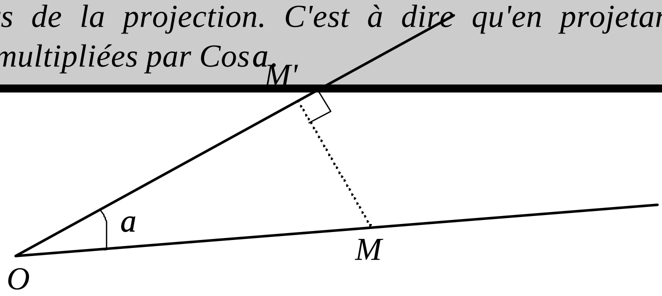
Définition *:*
Dans une projection ***orthogonale****, la direction de la projection est perpendiculaire à la droite sur laquelle on projette.*

Soient deux droites (D) et (D') sécantes en O. Soit ***a*** *l'angle aigu formé par ces deux droites. Lorsque l'on projette des points A, B, C de (D) orthogonalement en A', B', C' sur*

(D'), on constate que les longueurs projetées sont proportionnelles aux longueurs initiales.

> ***<u>Définition</u>** :*
> *On appelle **Cosinus** de l'angle aigu α (noté $Cos\alpha$), le coefficient de proportionnalité opérant sur les longueurs au cours de la projection. C'est à dire qu'en projetant orthogonalement, les longueurs sont multipliées par $Cos\alpha$.*

<u>Illustration</u> **:**

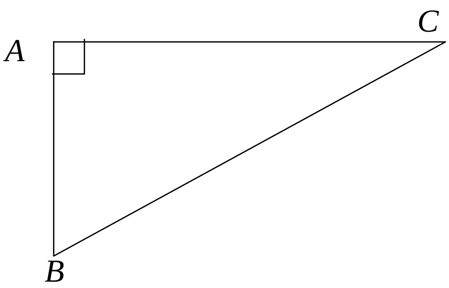


$OM' = OM \times Cos\alpha$

$$Cos\alpha = \frac{OM'}{OM}$$

$$OM = \frac{OM'}{Cos\alpha}$$

5. Propriétés du Cosinus



<u>a) Dans un triangle rectangle</u>

Par rapport à l'angle $\hat{B}$, [BC] se projette en [AB].

$$Cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

Par rapport à l'angle $\hat{C}$, [BC] se projette en [AC].

$$Cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

Dans le triangle rectangle, le plus grand côté est l'hypoténuse. Par rapport à un angle aigu de ce triangle, on peut qualifier les deux autres côtés de "côté adjacent" (celui qui forme l'angle avec l'hypoténuse) et de "côté opposé".
Par exemple, sur ce dessin : [AC] est le côté adjacent pour l'angle en C, et opposé pour l'angle en B; et [AB] est le est le côté adjacent pour l'angle en B, et opposé pour C.
*Dès lors il est **<u>pratique</u>** de retenir la "formule" suivante :* $Cos = \dfrac{adjacent}{hypoténuse}$

<u>b) Valeurs du Cos</u>

L'hypoténuse étant le plus grand côté, on aura : **<u>$Cos\alpha < 1$</u>**
Exemples de valeurs :

α	37°	60°	67°	78°
$Cos\alpha$	$\approx 0{,}8$	0,5	$\approx 0{,}4$	$\approx 0{,}2$

Lorsque α augmente de 0 à 90°, le Cosα diminue de 1 à 0.
Mais il n'y a pas proportionnalité entre l'augmentation de l'un et la diminution de l'autre. *Cos 0° = 1 ; Cos 60° = 0,5 ; Cos 90° = 0*

On peut utiliser une calculatrice pour obtenir les valeurs des cosinus avec une certaine précision, mais le tableau fourni en annexe est largement suffisant pour le travail abordé en classe de quatrième.

c) Construction d'un angle dont on connaît le Cos

Soit a un angle dont on connaît le Cos ; Cos a = 0,7.
Il faut imaginer un triangle rectangle ayant un angle a. Il faut donc que pour cet angle, le côté adjacent et l'hypoténuse soient dans un rapport de 0,7.
Prenons par exemple : côté adjacent = 7 et hypoténuse = 10.

Construction :

- *Tracer ~~un~~ segment [AB] de 7 cm.*
- *Tracer en B la perpendiculaire à [AB]. Appelons-la [Bx).*
- *Tracer un arc, de centre A et de rayon 10 cm. Il coupe [Bx) en C.*

L'angle BAC a un Cos de 0,7.

PROJECTION ET MILIEU

Constructions

- *A, B, C et D sont quatre points donnés. Dans une projection, on sait que le projeté de A est B et que le point C est invariant. Comment construire le point E, projeté d'un point D donné?*
- *I, J et K sont trois points donnés. Construire le triangle ABC sachant que I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [BC].*
- *I et J sont deux points donnés. Construire le triangle équilatéral ABC sachant que I est le milieu de [AB] et que J est le milieu de [AC].*

Exercice 1

Soit ABCD un parallélogramme et M un point quelconque. Le symétrique de M par rapport à A est N, le symétrique de N par rapport à B est P, et le symétrique de P par rapport à C est Q.
Démontrer que M et Q sont symétriques par rapport à D.

Exercice 2

Soit ABCD un quadrilatère qui n'a pas de côtés parallèles ni de côtés perpendiculaires et tel que AB = CD. On appelle I le milieu de [AC], L le milieu de [BC], K le milieu de [DB] et J le milieu de [AD].
Déterminer la nature de IJKL .

EXERCICES DE DEMONSTRATION

Exercice 3

Les diagonales d'un parallélogramme ABCD se coupent en O. On appelle M et N les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].
Montrer que M, O et N sont alignés.

Exercice 4

Dans un triangle ABC isocèle en A, on appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC). Soit I le projeté de H sur (AB) parallèlement à (AC) et J le projeté de H sur (AC) parallèlement à (AB).
a) Montrer que I est le milieu de [AB] et que J est le milieu de [AC].
b) Montrer que AIHJ est un losange.

Exercice 5

Dans un trapèze ABCD de bases [AB] et [DC], les points M et N sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [BC]. La droite (MN) coupe la droite (AC) en I et la droite (BD) en J.
a) Montrer que (MN) est parallèle aux droites (AB) et (DC).
b) Montrer que I est le milieu de [AC] et J le milieu de [DB].

Exercice 6

Soit [IJ] un segment de 8 cm. Montrer que le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre I et de rayon r = 4 cm et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre J et de rayon 4 cm se coupent au milieu de [IJ] que l'on appelle K.
Par le point I, on mène une droite (D) tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ en un point M. La parallèle à (MJ) passant par K coupe (IM) en L et $\mathcal{C}_1$ en C.
Montrer que LK = r/2 et que (IL) est la médiatrice du segment [CK]. En déduire que ICK est équilatéral.

Exercice 7

Construire un parallélogramme ABCD tel que AD = AC.
a) Montrer que I, projeté orthogonal de A sur (DC) est le milieu de [DC].
b) On appelle J le milieu de [AB]. Montrer que AICJ est un rectangle.
c) Montrer que les droites (DB), (AC) et (IJ) sont concourantes en un point (qu'on appelle O).
c) Soit K et L les milieux respectifs des segments [AD] et [BC]. Montrer que KJLI est un parallélogramme.

UTILISATION DU COS

Résolution d'un triangle

Il s'agit de calculer les longueurs et angles inconnus dans un triangle rectangle.
Il faut connaître au moins un côté et un angle aigu ou deux côtés.
On peut utiliser :

- *le cosinus*
- *l'énoncé de Pythagore*
- *la somme des angles dans le triangle.*

1. On connaît un côté et un angle aigu

Exemple:
Le triangle TAN est rectangle en A, TN = 6 cm et $\widehat{N}$ = 40°

Une figure à main levée suffit pour connaître la position des points.
On cherche à calculer NA, AT et l'angle T.

Solution :

AN = NT ´ Cos $\widehat{N}$
donc AN = 6 ´ Cos 40°
*AN » 6 ´ 0,766 » 4,596 soit » 4,**6 cm**.*

*$\widehat{N}$ = 40° donc $\widehat{T}$ = 90° - 40° = **50°***
AT = NT ´ Cos T
donc AT = 6 ´ Cos 50°
*AT » 6 ´ 0,643 » 3,857 soit » **3,9 cm***

Vérifions par la réciproque de l'énoncé de Pythagore :
$AN^2 + AT^2$ » $4,6^2 + 3,9^2$ » 21,16 + 15,21 » 36,37
et $TN^2 = 6^2 = 36$
Le choix d'arrondis ne permet pas une parfaite égalité; mais lorsque les résultats sont si proches, on peut raisonnablement penser que l'égalité est vérifiée.

Exercice :

Résoudre les triangles suivants :

1) *Le triangle PIC est rectangle en I, avec $\widehat{C}$ = 35° et PC = 8 cm.*
2) *Le triangle TOC est rectangle en O, avec $\widehat{T}$ = 65° et TO = 5 cm.*
3) *Le triangle SIN est rectangle en I avec $\widehat{S}$ = 42° et IN = 4 cm.*
4) *Le triangle COS est rectangle en O avec C = 27° et CS = 8 cm.*

2. On connaît deux côtés

Exemple:

Le triangle ABC est rectangle en A avec AB = 4 cm et AC = 5 cm.
On cherche à calculer BC et les angles B et C.

Solution :

Dans ABC, on peut appliquer l'énoncé de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

donc $\mathbf{BC} = \sqrt{\mathbf{41}}$

$$Cos\ \hat{B} = \frac{AB}{BC} \text{ donc } \quad Cos\ \hat{B} = \frac{4}{\sqrt{41}} \approx \frac{4}{6,4} \approx 0,625$$

avec la calculatrice, on trouve $\hat{B} \approx 51,3°$

$$Cos\ \hat{C} = \frac{AC}{BC} \text{ donc } \quad Cos\ \hat{C} = \frac{5}{\sqrt{41}} \approx \frac{5}{6,4} \approx 0,780$$

avec la calculatrice, on trouve $\hat{C} \approx 38,7°$

Exercice 1

1. *Le triangle BUT est rectangle en U, avec BU = 6 cm et BT = 9 cm.*
2. *Le triangle LAC est rectangle en A avec LA = 123 et AC = 85.*
3. *Sur un cercle $\mathcal{C}$ de 6 cm de rayon, placer un diamètre [RE] et un point U tel que RU = 8 cm. Calculer les mesures arrondies au dixième des angles du triangle RUE.*
4. *Construire un triangle NET, avec NE = 55 cm, NT = 48 cm et TE = 73 cm. Calculer les trois angles du triangle.*

Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que BC = 5 cm et AB = 3 cm. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. *Faire une figure;*
2. *Calculer le rapport de projection orthogonale de (BC) sur (AB).*
3. *Calculer BH.*
4. *Calculer AC puis le rapport AC / BC ; en déduire CH.*
5. *Vérifier que l'on retrouve l'égalité : CH + BH = BC. Et vérifier les deux égalités :*
   $BA^2 = BH ´ BC$ $\qquad$ $CA^2 = CH ´ CB$

Exercice 3

Sur une droite (D) , on marque les points B, O et C dans cet ordre, tels que : BO = 5 cm et OC = 3 cm. A est le point de contact d'une tangente issue de B au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm.

1. *Faire une figure.*
2. *Calculer BA puis BO / BA.*
3. *Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer BH.*

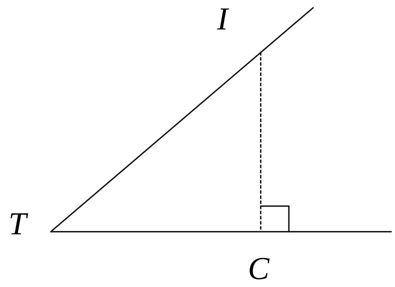
4. *Calculer AH, OH, HC et AC.*

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
1. *Démontrer que AB / BC = BH / AB. En déduire que $AB^2 = BC$ ´ BH.*
2. *Démontrer que AC / BC = CH / AC. En déduire que $AC^2 = BC$ ´ CH.*
3. *En utilisant les résultats précédents, montrer que l'on peut retrouver la relation de Pythagore.*

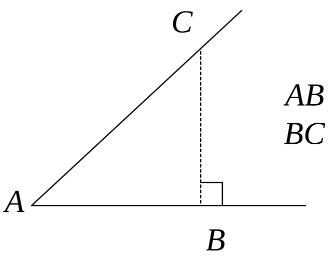
Exercice 5

Calculer le Cosinus de l'angle $\widehat{ITC}$ puis une mesure de cet angle à un degré près.
TC = 3 cm et TI = 2 cm.

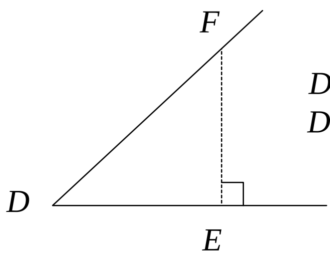


Exercice 6

Calculer le Cosinus des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$ puis une mesure de cet angle à un degré près.



AB = 2 cm
BC = 3 cm



DF = 4 cm
DE = 2 cm

Exercice 7

Déterminer dans chacun des cas ci-dessous les mesures des angles et des côtés des triangles ABC ***rectangles en A.***

a) *AB = 5 cm et BC = 7 cm.*
b) *AC= 4 cm et BC = 8 cm.*
c) *AB = 5 cm et AC = 7 cm.*
d) *AB = 4,5 cm et $\widehat{ABC}$ = 40°.*
e) *BC = 6 cm et $\widehat{ABC}$ = 30°.*
f) *AC = 4 cm et $\widehat{ACB}$ = 54°.*

Exercice 8

Construire sans rapporteur (avec la règle et le compas) les angles suivants:

a tel que Cos a = 1 / 3	*a tel que Cos a = 1 / 4*
a tel que Cos a = 1 / 2	*a tel que Cos a = 3 / 4*
a tel que Cos a = 0,6	

Exercice 9 Calcul de Cos 60° et de Cos 30°

Tracer un triangle équilatéral AIB. On désigne par a la longueur des côtés. Tous les calculs seront faits en fonction de a. On appelle C le symétrique de A par rapport à I.

1. *Montrer que ABC est un triangle rectangle en B. Quelles sont les mesures des angles A et C? Exprimer la longueur AC en fonction de a.*
2. *Montrer que BC =* $\sqrt{3} \times a$
3. *En déduire les valeurs exactes de Cos 60° et de Cos 30°.*

Exercice 10 : Calcul de Cos 45°

Tracer un triangle rectangle isocèle ABC. On désigne par a la longueur des côtés de l'angle droit.

1. *Quelle est la mesure de chacun des angles aigus?*
2. *Montrer que la longueur de l'hypoténuse est* $\sqrt{2} \times a$
3. *En déduire la valeur exacte de Cos 45°.*

Exercice 11

ABC est un triangle rectangle en A.

1. *Exprimer Cos* $\widehat{B}$ *et Cos* $\widehat{C}$
2. *En utilisant l'énoncé de Pythagore, Calculer (Cos* $\widehat{B}$*)² + (Cos* $\widehat{C}$*)²*

Tableau des valeurs du Cosinus d'un angle aigu.
Les valeurs sont arrondies au millième.

Angle	Cosinus	Angle	Cosinus	Angle	Cosinus
1	1,000	31	0,857	61	0,485
2	0,999	32	0,848	62	0,469
3	0,999	33	0,839	63	0,454
4	0,998	34	0,829	64	0,438
5	0,996	35	0,819	65	0,423
6	0,995	36	0,809	66	0,407
7	0,993	37	0,799	67	0,391
8	0,990	38	0,788	68	0,375
9	0,988	39	0,777	69	0,358
10	0,985	40	0,766	70	0,342
11	0,982	41	0,755	71	0,326
12	0,978	42	0,743	72	0,309
13	0,974	43	0,731	73	0,292
14	0,970	44	0,719	74	0,276
15	0,966	45	0,707	75	0,259
16	0,961	46	0,695	76	0,242
17	0,956	47	0,682	77	0,225
18	0,951	48	0,669	78	0,208
19	0,946	49	0,656	79	0,191
20	0,940	50	0,643	80	0,174
21	0,934	51	0,629	81	0,156
22	0,927	52	0,616	82	0,139
23	0,921	53	0,602	83	0,122
24	0,914	54	0,588	84	0,105
25	0,906	55	0,574	85	0,087
26	0,899	56	0,559	86	0,070
27	0,891	57	0,545	87	0,052
28	0,883	58	0,530	88	0,035
29	0,875	59	0,515	89	0,017
30	0,866	60	0,500	90	0,000

	c	c		
1	1	1	1	1
2	4	8	1,414	0,5
3	9	27	1,732	0,333
4	16	64	2	0,25
5	25	125	2,236	0,2
6	36	216	2,449	0,167
7	49	343	2,646	0,143
8	64	512	2,828	0,125
9	81	729	3	0,111
10	100	1000	3,162	0,1
11	121	1331	3,317	0,091
12	144	1728	3,464	0,083
13	169	2197	3,606	0,077
14	196	2744	3,742	0,071
15	225	3375	3,873	0,067
16	256	4096	4	0,063
17	289	4913	4,123	0,059
18	324	5832	4,243	0,056
19	361	6859	4,359	0,053
20	400	8000	4,472	0,05
21	441	9261	4,583	0,048
22	484	10648	4,69	0,045
23	529	12167	4,796	0,043
24	576	13824	4,899	0,042
25	625	15625	5	0,04
26	676	17576	5,099	0,038
27	729	19683	5,196	0,037
28	784	21952	5,292	0,036
29	841	24389	5,385	0,034
30	900	27000	5,477	0,033

	c	c		
31	961	29791	5,568	0,032
32	1024	32768	5,657	0,031
33	1089	35937	5,745	0,03
34	1156	39304	5,831	0,029
35	1225	42875	5,916	0,029
36	1296	46656	6	0,028
37	1369	50653	6,083	0,027
38	1444	54872	6,164	0,026
39	1521	59319	6,245	0,026
40	1600	64000	6,325	0,025
41	1681	68921	6,403	0,024
42	1764	74088	6,481	0,024
43	1849	79507	6,557	0,023
44	1936	85184	6,633	0,023
45	2025	91125	6,708	0,022
46	2116	97336	6,782	0,022
47	2209	103823	6,856	0,021
48	2304	110592	6,928	0,021
49	2401	117649	7	0,02
50	2500	125000	7,071	0,02
51	2601	132651	7,141	0,02
52	2704	140608	7,211	0,019
53	2809	148877	7,28	0,019
54	2916	157464	7,348	0,019
55	3025	166375	7,416	0,018
56	3136	175616	7,483	0,018
57	3249	185193	7,55	0,018
58	3364	195112	7,616	0,017
59	3481	205379	7,681	0,017
60	3600	216000	7,746	0,017