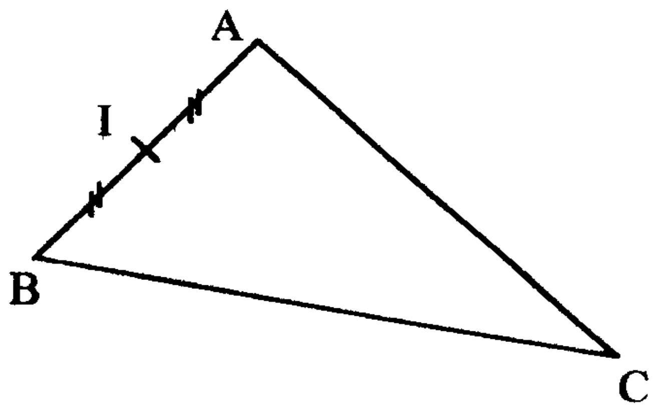
Propriétés de la droite des milieux

Exercice 1 :

Le but de l'exercice est de prouver le théorème suivant :

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.



Soit un triangle ABC et I le milieu de [AB]. La droite passant par I et parallèle au côté [BC] coupe le côté [AC] en J. Place le point J.

l) a) Place le point E symétrique de J par rapport à I.
  b) Démontre que le quadrilatère AJBE est un parallélogramme.
  c) A quelle longueur AJ est-elle donc égale ?

2) a) Démontre que le quadrilatère EBCJ est un parallélogramme.
  b) A quelle longueur JC est-elle donc égale ?

3) En déduire que J le milieu de [AC] ?

On procède de la même façon que l'exercice 1 pour démontrer la propriété suivante :

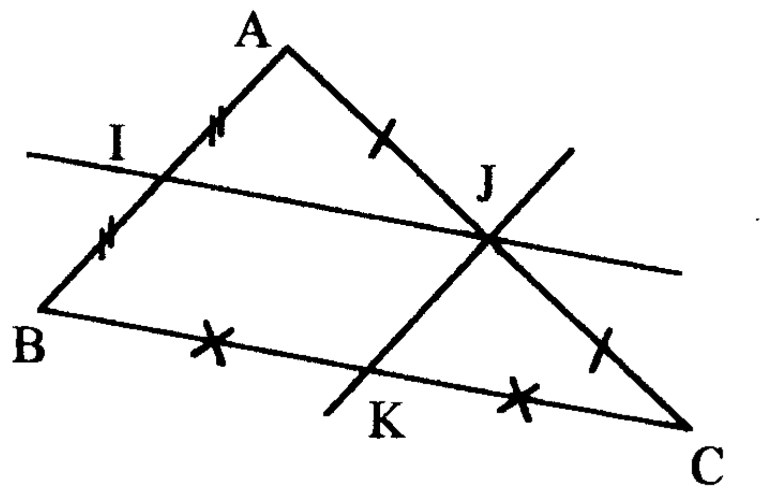
Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté.

On admettra cette propriété pour résoudre l'exercice 2.

Exercice 2 :

Le but de l'exercice est de prouver la propriété suivante :

Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié du troisième côté.

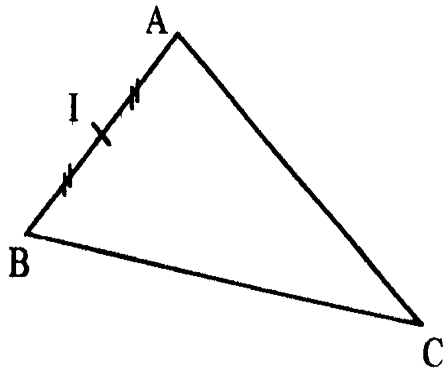


Soit un triangle ABC, I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [BC].

1) Démontre que le quadrilatère IJKB est un parallélogramme.

2) Démontre que IJ = $\frac{BC}{2}$.

Propriété 1 :



I est le milieu de [AB]. La droite parallèle à (BC) passant par I coupe (AB) en J. E est le symétrique de J par rapport à I.

1) ***On sait que :***

- I est le ________ de [AB].
- I est le ________ de [EJ].

Théorème :

Un quadrilatère qui a ses ___________ qui se coupent en leur milieu est un ______________________ .

Conclusion :

Le quadrilatère (AJBE) est un _________________________ donc la droite (EB) est _______________ à (AJ), or C∈(AJ) donc (EB) est parallèle à (AC), et les distances AJ et EB sont _________.

2) ***On sait que :***

- (EB) est _________ à (AJ).
- (IJ) est _________ à (BC), or E∈(IJ) donc (EJ) est ____________ à (BC).

Théorème :

Un quadrilatère qui a ses côtés opposés _____________ deux à deux est un ______________________.

Conclusion :

Le quadrilatère (EJCB) est un ___________________________ et les longueurs JC et EB sont __________.

Finalement, les distances ___ et EB sont égales ainsi que ___ et EB donc ________. On en déduit ainsi que J est le _________ de [AC].