Quatrièmes : TRIANGLES – MILIEUX - PARALLELES

I. THEOREMES DES MILIEUX

1/ ACTIVITE PREPARATOIRE

Construire un triangle ABC et noter I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].

Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC) ? Estimer le rapport $\frac{IJ}{BC}$.

2/ DEUX PREMIERS THEOREMES DES MILIEUX

Théorème 1 :

SI dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés, ALORS cette droite (appelée droite des milieux) est parallèle au troisième côté de ce triangle.

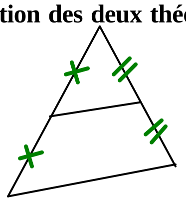
Commentaire : Les couleurs évitent les confusions entre hypothèses et conclusions...

Théorème 2 :

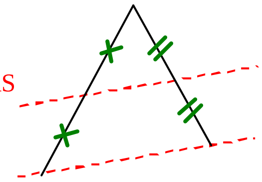
SI dans un triangle un segment passe par les milieux de deux côtés, ALORS sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté de ce triangle.

Schématisation des deux théorèmes :

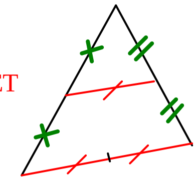
SI



ALORS



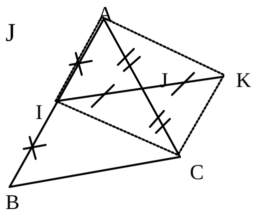
ET



Démonstration :

Hypothèses : ABC triangle, I milieu de [AB] et J milieu de [AC].
On note K le symétrique de I par rapport à J.

AKCI est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu J
On en déduit que (KC) // (IA) soit que (KC) // (BI) et que KC = IA.
Mais comme I est le milieu de [AB] on a aussi KC = BI
Donc BIKC est un parallélogramme et comme J est le milieux de IK on a :



Conclusion : (IK) // (BC) soit (IJ) // (BC) (théorème 1)
IJ = 1/2 JK = 1/2 BC (théorème 2).

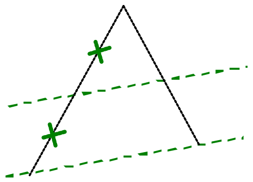
3/ LE TROISIEME THEOREME DES MILIEUX

Théorème 3 :

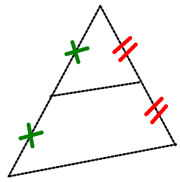
SI dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au second, ALORS cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Schématisation du troisième théorème :

SI



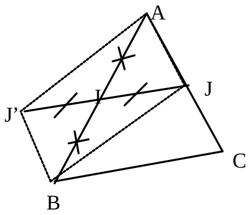
ALORS



Démonstration :

Hypothèses : ABC triangle, I milieu de [AB]. (D) parallèle à (BC) coupe [AC] en J. On note J' le symétrique de J par rapport à I.

Les droites (J'J) et (AB) ont même milieu I donc AJBJ' est un parallélogramme et AJ = J'B.
On en déduit aussi que (J'B) // (AJ) donc que (J'B) // (JC).
Mais comme J et J' appartiennent à (D) on à aussi (JJ') // (BC) et donc le quadrilatère JCBJ' est un parallélogramme (ses côtés opposés sont parallèle deux à deux).
On a donc JC = J'B
Des deux égalités établies on tire AJ = JC.



Conclusion : J est le milieu de [AC].

Remarque :
Si les conditions de ce troisième théorème sont remplies, une fois que l'on a démontré la présence du deuxième milieu, les hypothèses du deuxième théorème des milieux sont vérifiées.

II. DROITE PARALLELE DANS UN TRIANGLE

1/ ACTIVITE PREPARATOIRE

Expérimentations où les élèves constatent l'égalité des rapports.

2/ (PETITE) PROPRIETE DE THALES (ADMISE).

Propriété de Thalès :

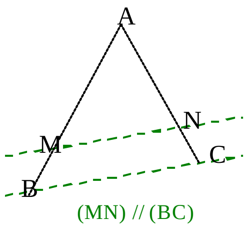
SI dans un triangle une droite passe par deux points des côtés et si elle est parallèle au troisième côté, ALORS elle forme un triangle dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à celles du triangle initial.

Autrement dit :

SI dans un triangle ABC, M appartient à [AB], N à [AC] et (MN) est parallèle à (BC)
ALORS $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ **(ou** $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$**)**

Schématisation de la propriété de Thalès :

SI



ALORS les côtés du triangle AMN sont proportionnels à ceux du triangle ABC, c'est-à-dire que :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$