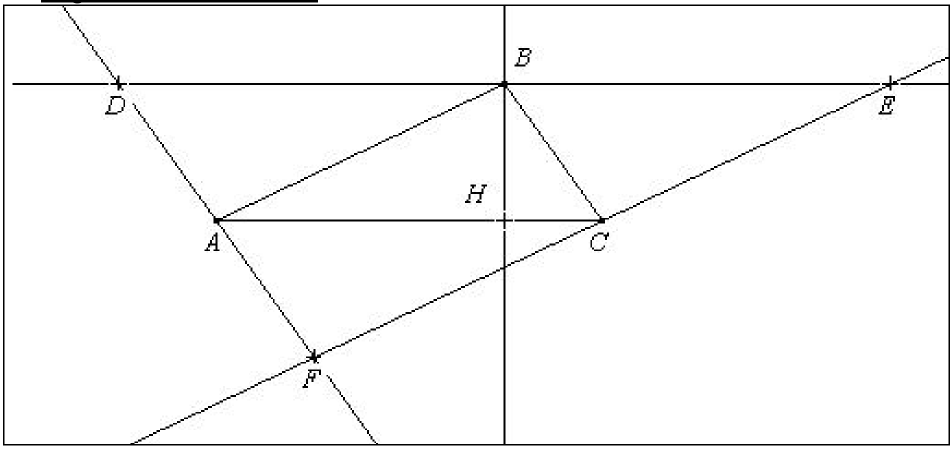
DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ DES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Énoncé de la propriété :

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Figure et données :



Données *:*
- *? ? ABC triangle*
- *? ? (DF) // (BC)*
- *? ? (EF) // (AB)*
- *? ? (DE) // (AC)*
- *? ? (BH); est une hauteur du triangle ABC.*

Démonstration :

1. *Montrer que B est le milieu de [DE]*
2. *Montrer que (BH) est la médiatrice de [DE]*
3. *De la même manière; montrer que les deux autres hauteurs dans ABC sont les deux autres médiatrices dans DEF.*
4. *Conclure.*

Démonstration de la propriété des hauteurs d'un triangle

Démonstration :

5. *Montrons que B est le milieu de [DE]*

BECA et DBCA sont des parallélogrammes car ils ont leurs côtés parallèles deux à deux.
Dans un parallélogramme; les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Donc (BD) et (BE) sont parallèles à la même droite (AC) ; les points ***B; D et E sont alignés****.*
De plus; les longueurs ***BD et BE sont égales*** *car elles sont toutes les deux égales à la même longueur AC.*
Conclusion : B est le milieu de [DE]

6. *Montrons que (BH) est la médiatrice de [DE]*

B est le milieu de [DE] ; et par construction ; (BH) ? (AC) ; or (AC) // (DE) donc (BH) est perpendiculaire à [DE] en son milieu. C'est donc la médiatrice de [DE]
De la même manière; on montre que les deux autres hauteurs dans ABC sont les deux autres médiatrices dans DEF. Le raisonnement est tout à fait analogue.

7. *Conclusion : les trois hauteurs du triangle ABC sont les trois médiatrices de DEF. Or on sait que les trois médiatrices dans un triangle sont concourantes. Donc les trois hauteurs le sont aussi.*

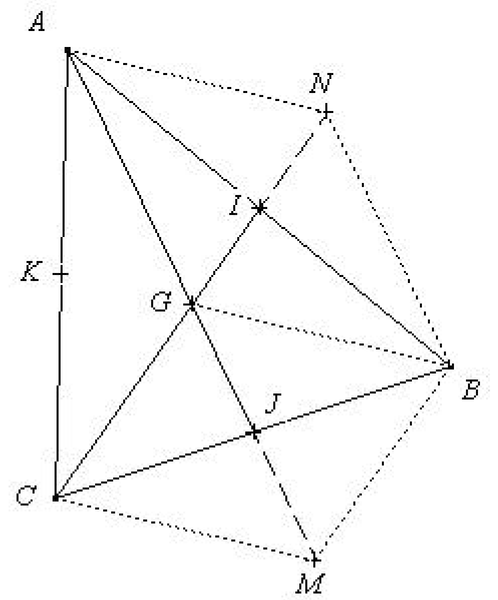
✍ ✍ ✍ ✍ ✍

DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ DES MÉDIANES D'UN TRIANGLE

Énoncé de la propriété :

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours (que l'on nomme le centre de gravité) est situé sur chacune d'elles aux deux tiers de la longueur à partir du sommet.

Figure et données :



Données *:*
? ? ABC triangle
? ? I milieu de [AB]
? ? J milieu de [BC]
? ? K milieu de [AC]
? ? [CI] et [AJ] se coupent en G .
? ? N symétrique de G par rapport à I
? ? M symétrique de G par rapport à J.

Démonstration :

1. *Montrer que ANBG et GBMC sont deux parallélogrammes.*
2. *Montrer que NACM est un parallélogramme.*
3. *Montrer que CG = 2 ? GI*
4. *Montrer que B; G et K sont alignés.*

Démonstration de la propriété des médianes d'un triangle

1. *Montrons que ANBG et GBMC sont deux parallélogrammes.*

I est le milieu de [AB] et de [NG]   J est le milieu de [BC] et de [MG] .
Si un quadrilatère a les diagonales de même milieu; alors c'est un parallélogramme.

2. *Montrons que NACM est un parallélogramme.*

D'après ce qui précède; NA = BG et (NA)//(BG); d'une part; et BG = MC et (BG)//(MC) d'autre part. De cela découle que NA = MC et (NA) // (MC).
Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur; alors c'est un parallélogramme.

3. *Montrons que CG = 2 ? GI*

NACM est un parallélogramme. Donc ses diagonales ont le même milieu. G est le milieu de [AM] ; donc CG = GN. Comme de plus; GN = 2? GI; on aura donc ***CG = 2? GI***

4. *Montrons que B; G et K sont alignés.*

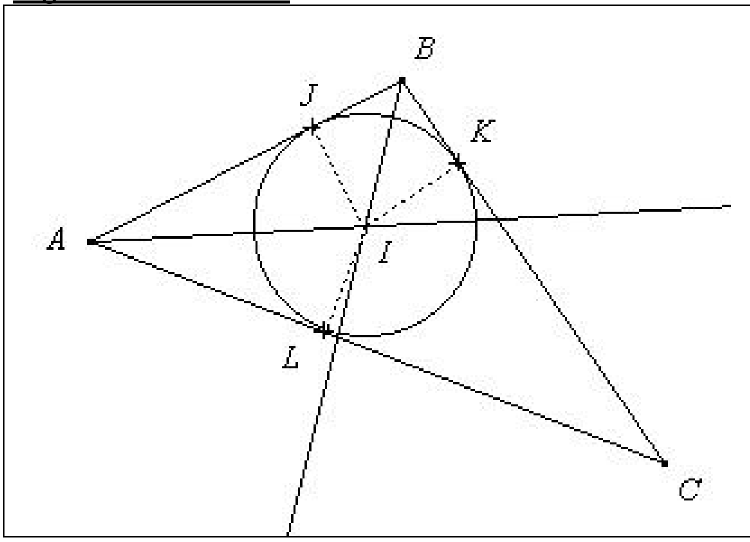
Dans le triangle CAN; (KG) passe par les milieux de deux côtés; elle est donc parallèle à (AN). Mais comme (AN) // (BG); les deux droites (KG) et (BG) sont confondues.
Les points B; G et K sont alignés.

DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ DES BISSECTRICES D'UN TRIANGLE

Énoncé de la propriété :

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Figure et données :



Données *:*

? ? *[AI) bissectrice de* $\widehat{BAC}$

? ? *[BI) bissectrice de* $\widehat{ABC}$

? ? *J est le projeté orthogonal de I sur [AB]*

? ? *K est le projeté orthogonal de I sur [BC]*

? ? *L est le projeté orthogonal de I sur [AC]*

Démonstration :

1. *Montrer que IJ = IK = IL*
2. *Montrer que [CI) est la bissectrice de* $\widehat{BCA}$.

Démonstration de la propriété des bissectrices d'un triangle

1. *Montrons que IJ = IK = IL*

I est sur les bissectrices de $\widehat{BAC}$ *et de* $\widehat{ABC}$.
Si un point est sur la bissectrice d'un angle; alors il est équidistant des côtés de cet angle.
Donc IJ = IK et IJ = IL ; d'où ***IJ = IK = IL***

2. *Montrons que [CI) est la bissectrice de* $\widehat{BCA}$.

IK = IL
Si un point est équidistant des côtés d'un angle; alors il est sur la bissectrice de cet angle.
Donc I est sur la bissectrice de $\widehat{BCA}$
C'est à dire que ***[CI) est la bissectrice de*** $\widehat{BCA}$

Conclusion *: La troisième bissectrice passe par le point d'intersection des deux premières. Elles sont donc concourantes.*

✍ ✍ ✍ ✍ ✍