

1 Construction de la figure

Soit ABC un triangle. On appelle:

- O le centre du cercle C passant par A, B et C.
- F le point diamétralement opposé à A.
- K le point d'intersection de la hauteur issue de A avec le cercle.
- M le milieu du côté BC.
- H le point d'intersection des droites (FM) et (AK).
- G le point d'intersection des droites (OH) et (AM).

2 Démonstration

- 1) Montrer que AFK et AFC sont des triangles rectangles.
- 2) Montrer que (OM) est la médiatrice du côté BC.
- 3) Montrer que les droites (OM) et (AK) sont parallèles.
- 4) Montrer que M est le milieu du segment HF.
- 5) Montrer que BHCF est un parallélogramme.
- 6) Montrer que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
- 7) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
- 8) Montrer que G est le centre de gravité du triangle AHF.
- 9) Montrer que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

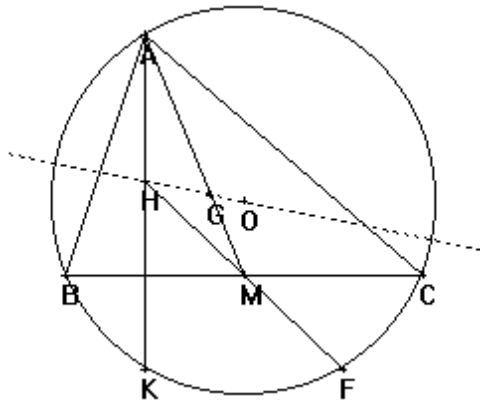
3 Conclusion

Le point O centre du cercle circonscrit, le point H orthocentre et le point G centre de gravité du triangle ABC sont alignés. La droite qui les contient est appelée droite d' EULER du triangle.

EULER Leonhard est un mathématicien suisse né à Bâle en 1707 et mort à Saint Petersburg en 1783. Son oeuvre immense concerne tous les domaines des mathématiques: géométrie, arithmétique, algèbre, analyse EULER a aussi laissé son nom au cercle passant par les pieds des 3 hauteurs du triangle. Ce cercle a des propriétés tout à fait étonnantes et passionnantes, mais ceci est une autre histoire...

Correction

1 Figure



2 Démonstration

- 1) Comme $[AF]$ est un diamètre, les triangles AFK et AFC sont inscrits dans un demi-cercle, ce sont des triangles rectangles.
- 2) BOC est un triangle isocèle en O car OB et OC sont des rayons. (OM) est la médiane principale de ce triangle isocèle, c'est donc aussi la médiatrice de $[BC]$.
- 3) Les droites (OM) et (AK) sont perpendiculaires à (BC) , elles sont donc parallèles entre elles.
- 4) Dans le triangle AHF , O est le milieu du côté AF . La droite (OM) passe par O et est parallèle au côté AH , elle coupe donc le côté HF en son milieu qui est M .
- 5) Les diagonales BC et HF du quadrilatère $BHCF$ se coupent en leur milieu M ; $BHCF$ est donc un parallélogramme.
- 6) Les droites (FC) et (BH) sont parallèles car portées par les côtés du parallélogramme $BHCF$. La droite (AC) est perpendiculaire à (FC) (voir question 1), elle est donc perpendiculaire à (BH) .
- 7) (AH) et (BH) sont des hauteurs de ABC , leur point d'intersection H est donc l'orthocentre de ABC .
- 8) Les droites (HO) et (AM) sont des médianes du triangle AHF , leur point d'intersection G est donc le centre de gravité de AHF .
- 9) Comme G est centre de gravité de la médiane AM , il se trouve aux $2/3$ de AM en partant de A . Mais AM est aussi une médiane de ABC . Le point G situé aux $2/3$ de cette médiane est donc le centre de gravité de ABC .

3 Conclusion

Dans le triangle ABC , le centre du cercle circonscrit (O), l'orthocentre (H) et le centre de gravité (G) sont alignés. De plus $HG = (2/3).HO$.