Chapitre 1 : Triangles, droites remarquables

I Triangles quelconques

1/ Médiatrice, cercle circonscrit

Définition : une droite est la médiatrice d'un segment si :elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu.

figure, illustrer l'équidistance (si un point est sur la médiatrice alors il est à égale distance des extrémités du segment et si un point est à égale distance des extrémités du segment alors il est forcément sur la médiatrice).

Propriété : Les trois médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point. On dit qu'elles sont concourantes en ce point.
Ce point de concours est le centre du cercle qui passe par les trois sommets du triangle.
Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle.

figures : triangles et cercles circonscrits 6,5 ; 7 et 7,5 puis 3,5 ; 6,5 et 8.

2/ Bissectrice, cercle inscrit

Définition : une droite est la bissectrice d'un angle si c'est son axe de symétrie, autrement dit si elle partage cet angle en deux angles de même mesure.

figure

Propriété : Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.
Ce point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

figure : triangle et cercle inscrits 9 ; 11,5 et 12

3/ Hauteur, orthocentre

Définition : dans un triangle une droite est une hauteur si elle passe par un sommet et si elle est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

figures, montrer cas intérieur et extérieur et préciser le vocabulaire « la droite perpendiculaire à (BC) et passant par A s'appelle la hauteur issue de A ou relative au côté [BC] et son point d'intersection avec (BC) s'appelle son pied ».

Propriété : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Ce point de concours est appelé l'orthocentre du triangle.

figures : triangles trois hauteurs 4 ; 6 et 70° puis 7 ; 110° et 30°.

Conséquence : Si une droite passe par le sommet d'un triangle et son orthocentre alors c'est une hauteur de ce triangle.

4/ Médiane, centre de gravité

Définition : dans un triangle une droite est une médiane si elle passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Propriété : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Ce point de concours est appelé le centre de gravité du triangle.

figurs : triangle trois médianes 8 ; 50° et 60°.

Conséquence : si une droite passe par le sommet d'un triangle et son centre de gravité alors c'est une médiane de ce triangle.

Position du centre de gravité : si un point est le centre de gravité d'un triangle alors il est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

II Triangles isocèles, équilatéraux

figure *: triangle isocèle 4 ; 6 et 6.et faire tracer toutes les droites remarquables.*

Propriété : Si un triangle est isocèle alors hauteur, médiane, bissectrice issues du sommet principal et médiatrice de la base sont confondues.

Conséquence : Si un triangle est équilatéral alors hauteur, médiane, bissectrice issues d'un sommet et médiatrice du côté opposé sont confondues.

figure *: triangle équilatéral de côté 5, faire noter que O est à la fois le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, le centre de gravité et l'orthocentre, .*

III Triangles rectangle, cercle circonscrit

1/ Propriété

figure *: triangle ABC rectangle en A.Tracer cercle de centre I milieu de [BC] et passant par un des sommet.*

Propriété : Si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'hypoténuse.

Démonstration :

Hypothèses : On suppose que le triangle ABC est rectangle en A et on note I le milieu de [BC].

Raisonnement :

.Si on note D le symétrique de A par rapport à I. Par construction le quadrilatère ABDC à ses diagonales [AD] et [BC] qui on le même milieu I donc c'est un parallélogramme de centre I

Le parallélogramme ABDC possède un angle droit en A donc c'est un rectangle.

Un rectangle a ses diagonales de même longueur donc IA = IB = ID = IC.

Conclusion : [BC] est le diamètre du cercle de centre I et passant par A, B et C.

2/ Réciproque

figure *: tracer un cercle de diamètre [BC] et de centre O et noter A un point de ce cercle.*

Propriété : Si un triangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'un des côtés alors il est rectangle.

Démonstration :

Hypothèses : ABC est un triangle, on suppose que O est le milieu de [BC] et que OA = OB = OC.

Raisonnement :

Les segments [OB], [OC] et [OA] sont des rayons pour le cercle et donc les triangles BAO et CAO sont isocèles en O

Si on note x la mesure en degré de l'angle BAO et y celle de l'angle CAO alors la mesure de l'angle BAC vaut x + y °. De plus les angles adjacents à la base d'un triangle isocèle étant de même mesure, x est aussi la mesure en degré de l'angle ABO et y celle de l'angle ACO.

On sait que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.

Donc, dans le triangle ABC : ABC + BAC + ACB = 180°.

On en déduit que : x + x + y + y = 180°, donc que : 2(x + y) = 180°.

Donc, finalement, BAC = x + y = 90°.

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle en A.

Commentaire : Les chapeaux des angles ne sont pas notés pour éviter les problèmes de compatibilité entre les différentes versions de word…