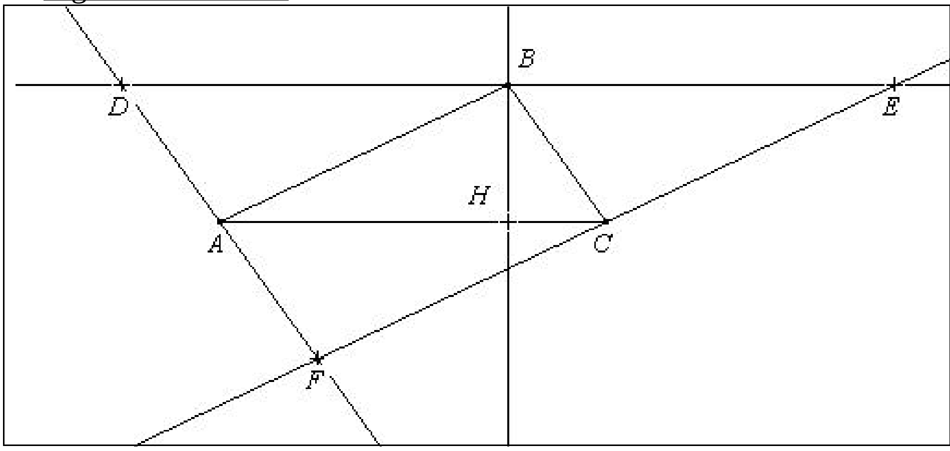
LES DROITES DU TRIANGLE

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE DES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Figure et données :



Données *:*

- *ABC triangle*
- *(DF) // (BC)*
- *(EF) // (AB)*
- *(DE) // (AC)*
- *(BH), est une hauteur du triangle ABC.*

1. *Montrons que B est le milieu de [DE]*

BECA et DBCA sont des parallélogrammes car ils ont leurs côtés parallèles deux à deux. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Donc (BD) et (BE) sont parallèles à la même droite (AC) ; les points ***B, D et E sont alignés****.*
De plus, les longueurs ***BD et BE sont égales*** *car elles sont toutes les deux égales à la même longueur AC.*
Conclusion : B est le milieu de [DE]

2. *Montrons que (BH) est la médiatrice de [DE]*

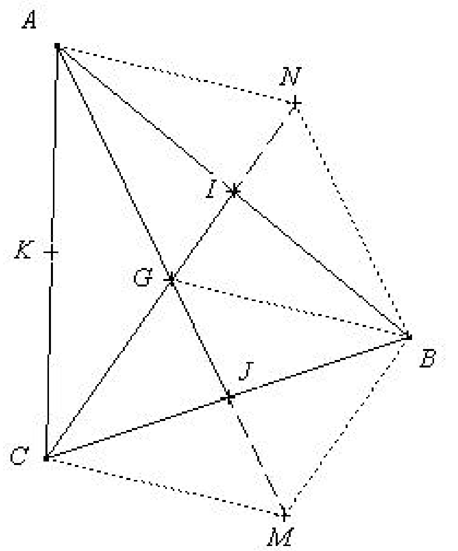
B est le milieu de [DE] , et par construction , (BH) ^ (AC) ; or (AC) // (DE) donc (BH) est perpendiculaire à [DE] en son milieu. C'est donc la médiatrice de [DE]
De la même manière, on montre que les deux autres hauteurs dans ABC sont les deux autres médiatrices dans DEF. Le raisonnement est tout à fait analogue.

3. *Conclusion : les trois hauteurs du triangle ABC sont les trois médiatrices de DEF. Or on sait que les trois médiatrices dans un triangle sont concourantes. Donc les trois hauteurs le sont aussi.*

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE DES MEDIANES D'UN TRIANGLE

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours (que l'on nomme le centre de gravité) est situé sur chacune d'elles aux deux tiers de la longueur à partir du sommet.

Figure et données :



Données *:*

- *ABC triangle*
- *I milieu de [AB]*
- *J milieu de [BC]*
- *K milieu de [AC]*
- *[CI] et [AJ] se coupent en G .*
- *N symétrique de G par rapport à I*
- *M symétrique de G par rapport à J.*

Démonstration :

1. Montrons que ANBG et GBMC sont deux parallélogrammes.
I est le milieu de [AB] et de [NG] *J est le milieu de [BC] et de [MG] .*
Si un quadrilatère a les diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.

2. Montrons que NACM est un parallélogramme.
D'après ce qui précède, NA = BG et (NA)//(BG), d'une part, et BG = MC et (BG)//(MC) d'autre part. De cela découle que NA = MC et (NA) // (MC).
Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

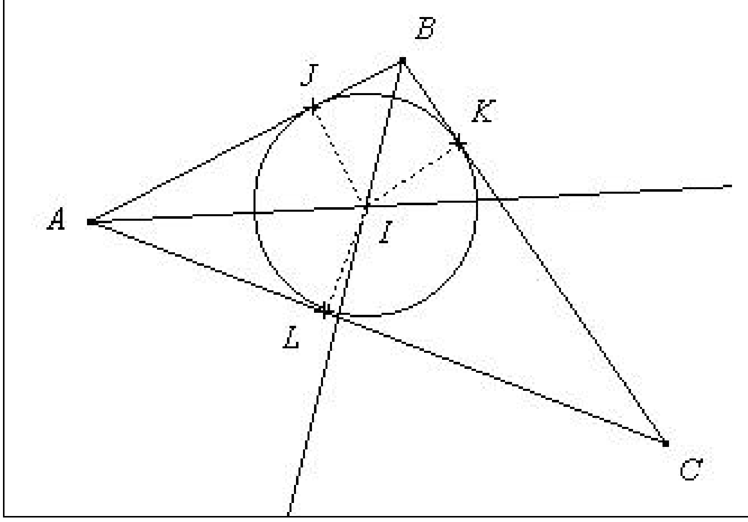
3. Montrons que CG = 2 ´ GI
NACM est un parallélogramme. Donc ses diagonales ont le même milieu. G est le milieu de [AM] , donc CG = GN. Comme de plus, GN = 2´ GI, on aura donc ***CG = 2´ GI***

4. Montrons que B, G et K sont alignés.
Dans le triangle CAN, (KG) passe par les milieux de deux côtés, elle est donc parallèle à (AN). Mais comme (AN) // (BG), les deux droites (KG) et (BG) sont confondues.
Les points B, G et K sont alignés.

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE DES BISSECTRICES D'UN TRIANGLE

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Figure et données :



Données *:*

- *[AI) bissectrice de* $\widehat{BAC}$
- *[BI) bissectrice de* $\widehat{ABC}$
- *J est le projeté orthogonal de I sur [AB]*
- *K est le projeté orthogonal de I sur [BC]*
- *L est le projeté orthogonal de I sur [AC]*

Démonstration :

1. Montrons que IJ = IK = IL

I est sur les bissectrices de $\widehat{BAC}$ *et de* $\widehat{ABC}$*.*
Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.
Donc IJ = IK et IJ = IL , d'où ***IJ = IK = IL***

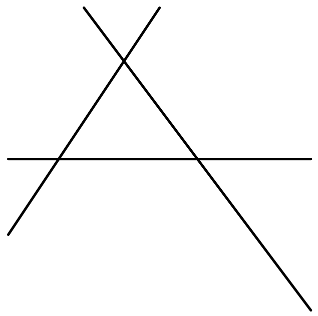
2. Montrons que [CI) est la bissectrice de $\widehat{BCA}$*.*
IK = IL
Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est sur la bissectrice de cet angle.
Donc I est sur la bissectrice de $\widehat{BCA}$
C'est à dire que ***[CI) est la bissectrice de*** $\boldsymbol{\widehat{BCA}}$

Conclusion *: La troisième bissectrice passe par le point d'intersection des deux premières.*
Elles sont donc concourantes.

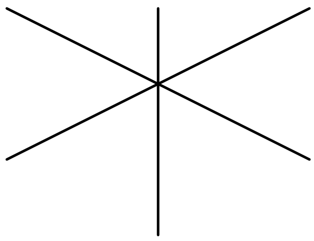
DROITES DU TRIANGLE

1. Rappels

*Deux droites sont parallèles ou sécantes. Elles sont sécantes si elles se coupent. Le point où elles se coupent s'appelle le point **d'intersection**.*
*Lorsque l'on trace une troisième droite, sécante aux deux premières, passant par leur point d'intersection, on dit que les trois droites sont **concourantes**.*
*Le point commun aux trois droites s'appelle alors **le point de concours**.*

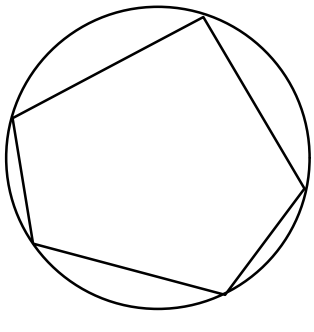


Droites sécantes deux à deux

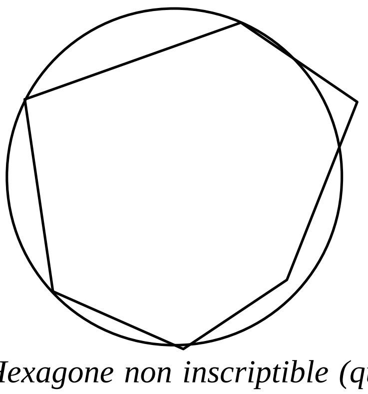


Droites concourantes.

*Le **cercle circonscrit** à une figure est le cercle passant par les sommets de cette figure.*
*La figure est alors **inscrite** dans le cercle.*



Pentagone et son cercle circonscrit.



Hexagone non inscriptible (qui n'a pas de cercle circonscrit)

***Propriétés des médiatrices du triangle**.*
Tous les triangles ont un cercle circonscrit. Le centre de ce cercle est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle.

2. Hauteurs du triangle

Définition *:*
Une hauteur dans un triangle est le segment joignant un sommet à son projeté orthogonal sur le côté opposé.

Aire du triangle
Dans un triangle quelconque, il y a trois côtés et pour chacun d'eux, une hauteur associée. Il y a donc trois manières de calculer l'aire :
Si c désigne la longueur d'un côté et h la longueur de la hauteur associée :

$$A = \frac{c \times h}{2}$$

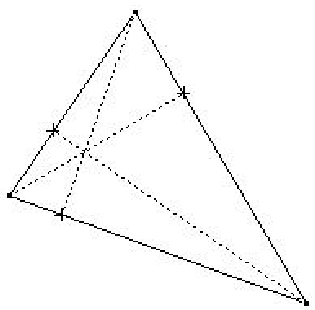
Dans un triangle rectangle, Il n'y a plus que deux manières de calculer l'aire :
Si c désigne la longueur de l'hypoténuse et h la longueur de la hauteur associée, et si a et b désignent les longueurs des deux côtés de l'angle droit :

$$A = \frac{c \times h}{2} = \frac{a \times b}{2}$$

Propriété des hauteurs d'un triangle :
Les trois hauteurs d'un triangle (ou les droites qui les portent) sont concourantes.
Le point de concours s'appelle ***l'orthocentre*** *du triangle.*

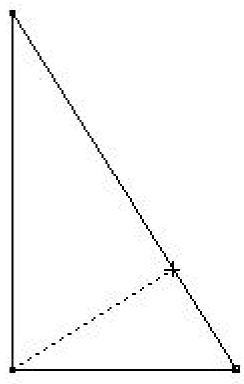
Idée de la démonstration :
On construit « autour » du triangle initial, un second triangle, de telle sorte que les hauteurs de l'un deviennent les médiatrices de l'autre. On applique alors la propriété des médiatrices dans un triangle.

Pas d'angle obtus



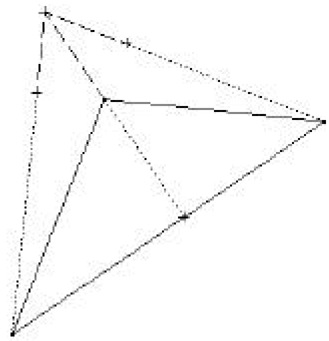
Les trois hauteurs et l'orthocentre sont intérieurs au triangle

Triangle rectangle



L'orthocentre est le sommet de l 'angle droit.
Deux hauteurs sont les côtés de l'angle droit.

Un angle obtus



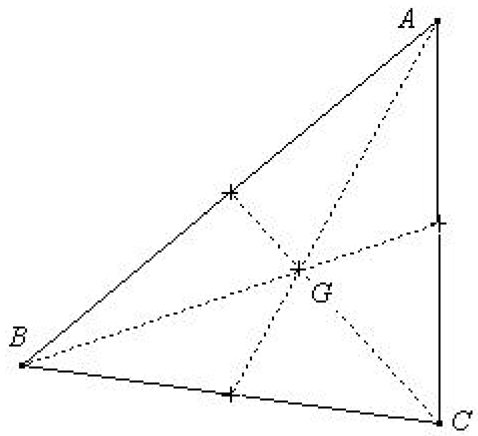
Deux hauteurs et l'orthocentre sont extérieurs au triangle.

3. Les médianes du triangle

Définition *:*
Une médiane dans un triangle est le segment joignant un sommet au milieu du côté opposé.

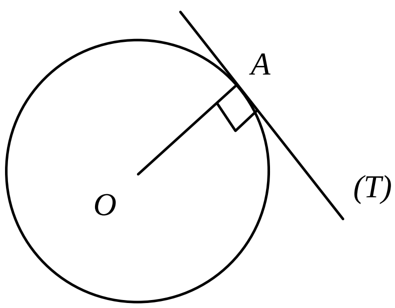
Propriété des médianes d'un triangle :
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours s'appelle le ***centre de gravité*** *du triangle.*
Il est situé aux deux tiers de la longueur de la médiane à partir du sommet

Idée de la démonstration :
On s'intéresse au point d'intersection G de deux médianes. En plaçant les symétriques de ce point par rapport aux milieux de deux des côtés, on obtient des parallélogrammes, grâce auxquels on peut déterminer la position du centre de gravité.
On montre ensuite que G est aligné avec le troisième milieu et le troisième sommet.



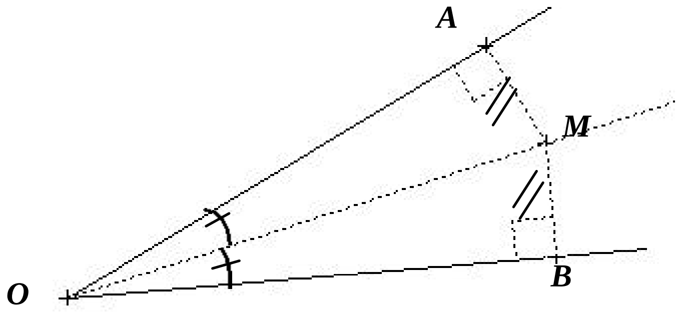
4. Les bissectrices des angles du triangle.

Rappels *:*
- *La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui est axe de symétrie de l'angle.*
- *Une droite qui n'a qu'un seul point commun avec un cercle est une* ***tangente*** *au cercle.*
- *Si (T) est tangente, en un point A, à un cercle de centre O, alors (T) ^ (OA).*



Propriété des points d'une bissectrice :

- *Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.*
- *Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est. situé sur la bissectrice de cet angle*



Propriété des bissectrices dans un triangle *:*
Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est le centre du ***cercle inscrit*** *dans le triangle.*

Idée de la démonstration
On montre que le point I d'intersection de deux des bissectrices est équidistant des trois côtés du triangle, et qu'il est donc sur la troisième bissectrice.