EXERCICES

Exercice 1

a) Rappeler la définition de la bissectrice d'un angle.
b) Construire et faire la liste des données de la figure suivante :

BAC est un triangle rectangle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe [AB] en I. On donne : AC = 9 et AI = 5. (Dans tout le problème l'unité est le cm).
La médiatrice de [CI] coupe [CI] en O, [AC] en K et [BC] en L.

*c) **Citer les propriétés** qui permettent de compléter les démonstrations suivantes :*

Montrons que CKIL est un losange.

On sait que : *[CI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KCL}$.*
[CI) ^ (KL) car c'est la médiatrice.

Propriété n° 1 :

Conclusion : KCL est un triangle isocèle, donc KC = CL.

On sait que : *.K et L sont sur la médiatrice de [IC] .*

Propriété n° 2 :

Conclusion : KI = KC et LC = LI. Donc KI = KC = CL = LI..

Propriété n° 3 :

Conclusion : CKLI est un losange .

Montrons que A, K, O et I sont sur un même cercle.

On sait que : *.AKI et KIO sont rectangles, l'un en A , l'autre en O.*
Appelons $\mathbb{C}$ le cercle de diamètre [IK] .

Propriété n° 4 :

Conclusion : A et O sont deux points de $\mathbb{C}$. Donc A, K, I et O sont quatre points de $\mathbb{C}$.

Exercice 2

1. *Construire un triangle ABC tel que BC = 6 cm, AB = 5,5 cm et AC = 6,5 cm.*
   Les hauteurs issues de A et de B se coupent en H. La droite (CH) coupe [AB] en M.
2. *Que représente le point H pour le triangle ABC ?*
3. *Que représente [CM] pour le triangle ABC ?*

Exercice 3

1. *Construire un triangle ABC tel que BC = 5 cm, $\widehat{ABC}$ = 110° et AB = 4 cm.*
   A' est le projeté orthogonal de A sur (BC), B' est le projeté orthogonal de B sur (AC), et C' est le projeté orthogonal de C sur (AB).
2. *Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.*

Exercice 4

1. *Construire un triangle ABC tel que BC = 7 cm, AA' = 7 cm et BA' = 3 cm. A' étant le projeté orthogonal de A sur (BC). Construire les hauteurs de ABC ; H est leur point de concours.*
2. *Quels sont les orthocentres des triangles ABC, ABH, ACH, et BHC ?*

Exercice 5

1. *Dans un triangle ABC quelconque, la hauteur issue de B coupe (AC) en N ; la hauteur issue de A coupe (BC) en M ; la hauteur issue de C coupe (AB) en P. H est leur point de concours.*
2. *Construire la figure dans les deux cas suivants :*

- *ABC a trois angles aigus.*
- *ABC a un angle obtus de sommet A.*

Dans chaque cas,

3. *Déterminer l'orthocentre du triangle HAB.*
4. *Tracer le cercle de diamètre [CH] . Démontrer que ce cercle passe par les points M et N.*

Exercice 6

1. *Soit IJK un triangle, H le projeté orthogonal de K sur (IJ) tel que IH = 3 cm, IJ = 5 cm, HJ = 2 cm et HK = 1,5 cm. Le cercle $\mathbb{C}$ de diamètre [IK] coupe (KJ) en K et en L. Le cercle $\mathbb{C}$ ' de diamètre [JK] coupe (IK) en K et en M.*
2. *Démontrer que H est sur les deux cercles $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ '.*
3. *Démontrer que (IL) est perpendiculaire à (KJ) et que (JM) est perpendiculaire à (IK).*
4. *Démontrer que les droites (IL), (KH) et (JM) sont concourantes.*

Exercice 7

Construire un triangle ABC d'orthocentre H avec BC = 8 cm, BH = 5 cm et CH = 4,5 cm.

Exercice 8

Construire un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathbb{C}$ de centre O, tel que $\widehat{AOB}$ = 100° et $\widehat{AOC}$ = 140°.
Déterminer par le calcul les mesures des angles du triangle ABC.
Soit H l'orthocentre de ABC, calculer les mesures des angles $\widehat{AHB}$, $\widehat{BHC}$ et $\widehat{CHA}$.

Exercice 9

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathbb{C}$ de centre O. Faire une figure avec OA = 6 cm, $\widehat{AOB}$ = 140° et BC = 9 cm. A' est le symétrique de H par rapport à (BC), B' est le symétrique de H par rapport à (AC) et C' est le symétrique de H par rapport à (AB).
Quelle remarque peut-on faire concernant ces trois points ?
Refaire la même construction en modifiant la forme du triangle ABC. La remarque précédente reste-t-elle valable ?

Exercice 10

1. *Sur un segment [AB] de 12 cm et de milieu O, placer un point C à 8 cm de A. Tracer l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB]. La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe ce demi-cercle en D. Quelle est la nature de ABD ?*
2. *La perpendiculaire à (AD) passant par O coupe (AD) en H. On appelle E le point commun à (OH) et (DC). Montrer que (AE) et (OD) sont perpendiculaires.*

Exercice 11

$\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ ' sont deux cercles de centres respectifs O et O', qui se coupent en A et B.
La droite (AO) recoupe $\mathbb{C}$ en M. La droite (AO') recoupe $\mathbb{C}$ ' en M'.
Que peut-on dire des droites (MM') et (OO') ?

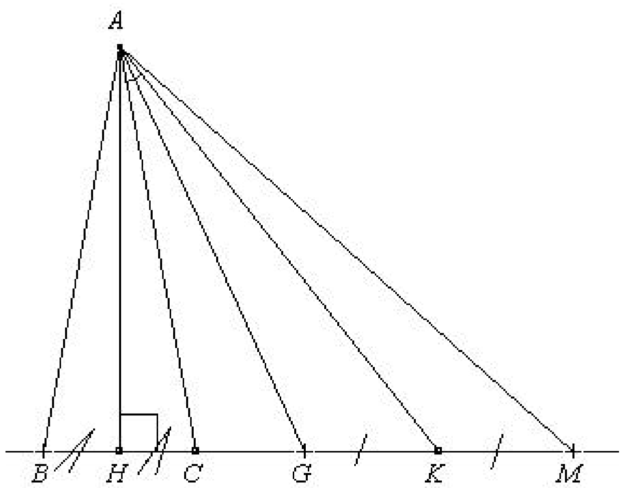
Exercice 12

ABCD est un rectangle. La médiatrice de [AC] coupe (AB) en E et (BC) en F.
Que peut-on dire des droites (CE) et (AF) ?

Exercice 13

Données :

- *(AH) est la médiatrice de [BC]*
- *[AG) est la bissectrice de $\widehat{CAK}$.*
- *K est le milieu de [GM]*

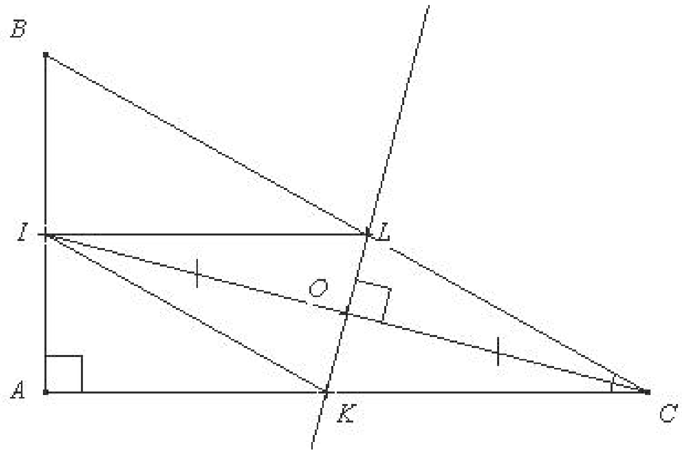


Que suffit-il de tracer sur la figure pour obtenir :

1. *Le centre O du cercle circonscrit à ACB ?*
2. *Le centre I du cercle inscrit dans ACK ?*
3. *Le centre de gravité J de AGM ?*
4. *L'orthocentre H de ACG ?*

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1



Les propriétés *qui permettent de compléter les démonstrations:*

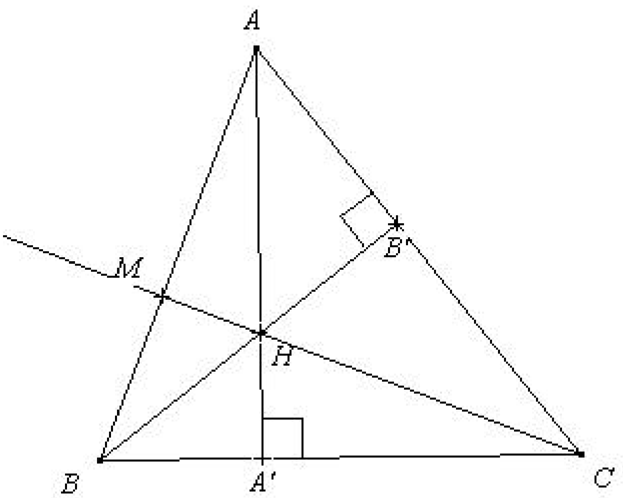
Propriété n° 1 *:*
Si un triangle est isocèle, l'axe de symétrie est à la fois bissectrice de l'angle au sommet et médiatrice de la base.

Propriété n° 2 :
Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance de ses extrémités.

Propriété n° 3 :
Si un quadrilatère a quatre côtés égaux, alors c'est un losange.

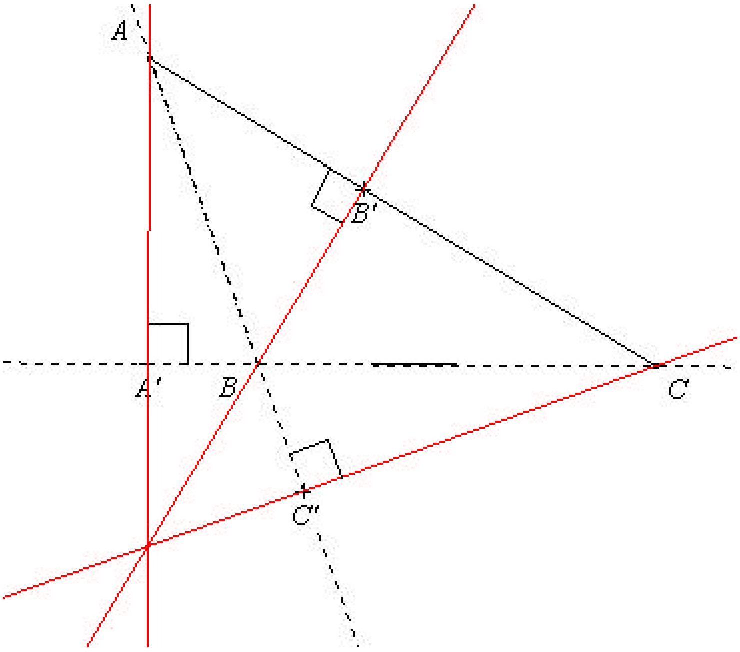
Propriété n° 4 :
Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.

Exercice 2



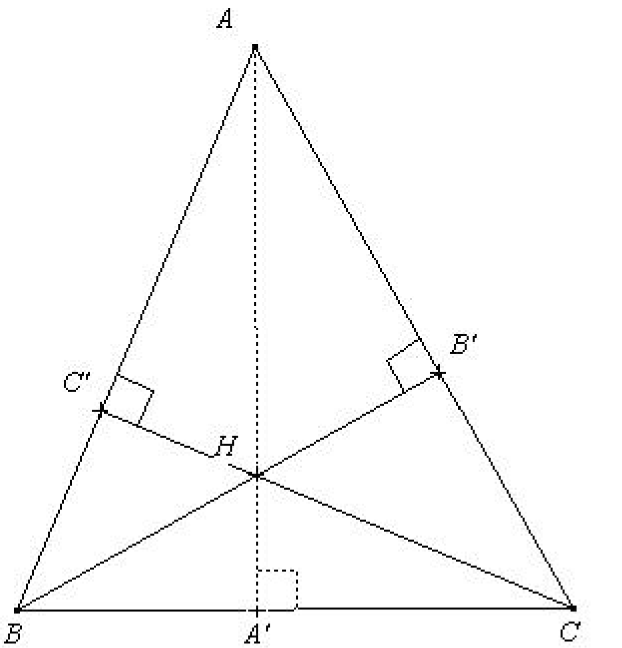
H est le point d'intersection de deux hauteurs, c'est donc l'orthocentre du triangle ABC .
[CM] est la troisième hauteur du triangle ABC.

Exercice 3



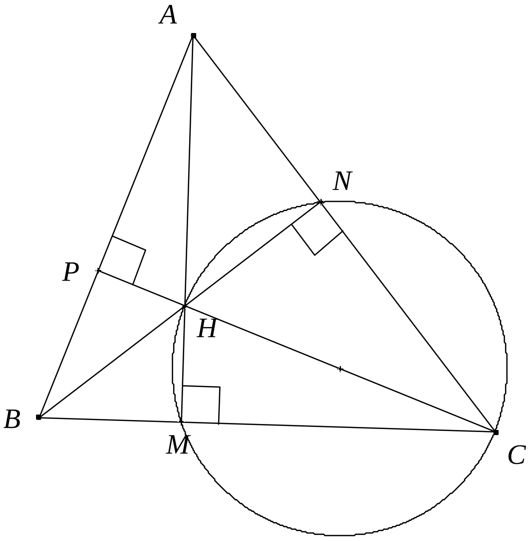
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, car elles portent les hauteurs du triangle ABC.

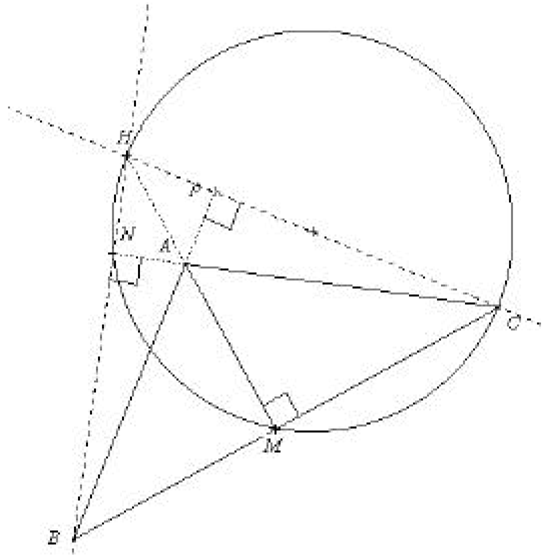
Exercice 4



Les orthocentres :
ABC : H
ABH : C
ACH : B
HBC : A

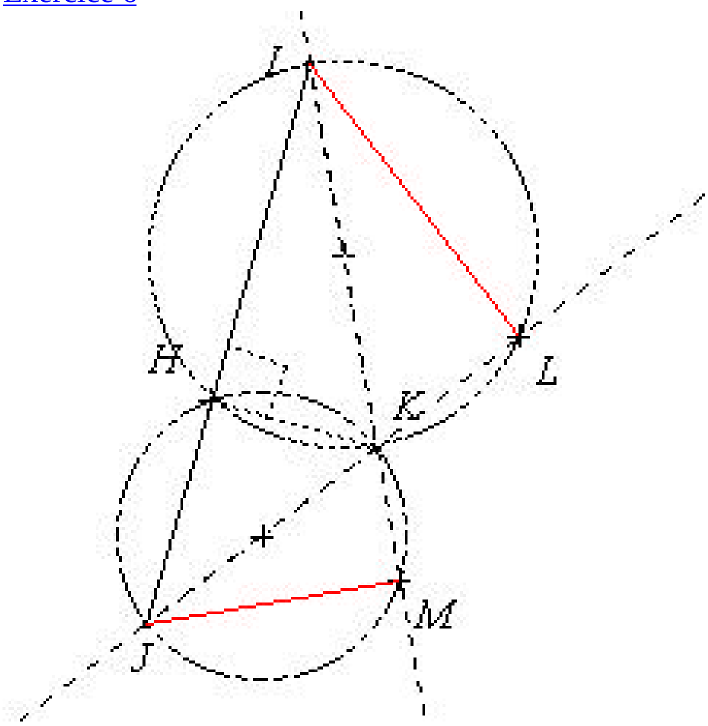
Exercice 5





1. *L'orthocentre du triangle HAB est le point C.*
2. *Le cercle passe par les points M et N car [HC] est le diamètre du cercle et les triangles HCM et MCN sont rectangles en M et en N. Si un triangle est rectangle, l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.*

Exercice 6



KHI et KHJ sont rectangles en H. Si un triangle est rectangle, l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.
Donc ℂ est le cercle circonscrit à KHI et ℂ ' est le cercle circonscrit à KHJ. H est donc sur les deux cercles.

Si un côté du triangle est diamètre du cercle circonscrit, alors le triangle est rectangle. Donc KIL et KJM sont rectangles en L et en M.
D'où (IL) ^ (KJ) et (JM) ^ (IK).

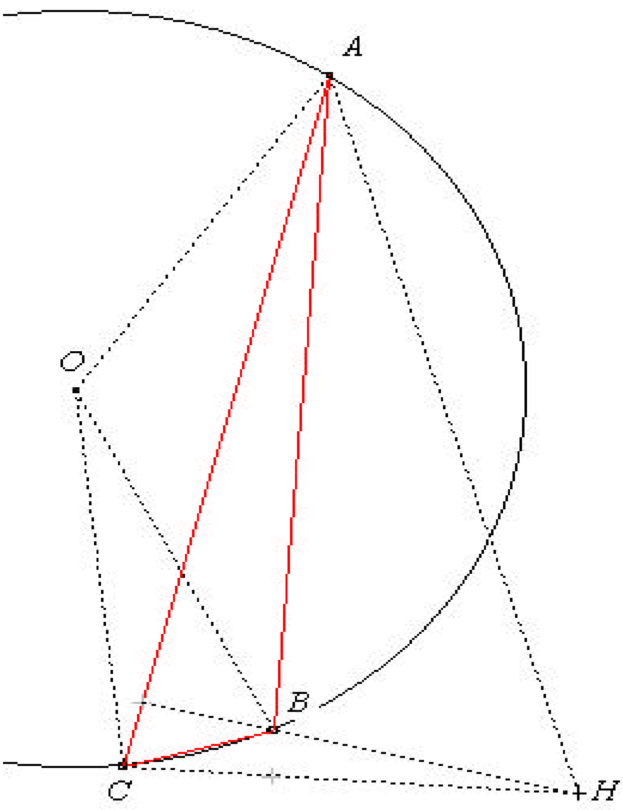
(Il) , (KH) et (JM) sont trois droites qui portent les hauteurs du triangle IJK ; elles sont donc concourantes.

Exercice 7

Programme de construction :

- *Tracer [BC] de 8 cm.*
- *Tracer un arc de centre B, de rayon 5 cm.*
- *Tracer un arc de centre C, de rayon 4,5 cm.*
- *Les deux arcs se coupent en H.*
- *Tracer la perpendiculaire à (BH) passant par C.*
- *Tracer la perpendiculaire à (BC) passant par H.*
- *Elles se coupent en A.*

Exercice 8



OBC est isocèle, donc

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180-40}{2} = 70°$$

AOB est isocèle, donc

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180-100}{2} = 40°$$

AOC est isocèle , donc

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \frac{180-140}{2} = 20°$$

$$\boldsymbol{\widehat{CAB}} = \widehat{OAB} - \widehat{OAC} = 40 - 20 = \mathbf{20°}$$

$$\boldsymbol{\widehat{CBA}} = \widehat{OBC} + \widehat{OBA} = 70 + 40 = \mathbf{110°}$$

$$\boldsymbol{\widehat{ACB}} = \widehat{OCB} - \widehat{OCA} = 70 - 20 = \mathbf{50°}$$

On vérifie que la somme des trois angles est égale à 180°.

$$\widehat{CAH} = 90 - \widehat{ACB} = 90 - 50 = 40°$$

$$\boldsymbol{\widehat{AHB}} = 90 - \widehat{CAH} = 90 - 40 = \mathbf{50°}$$

De la même manière, on trouve :

$$\boldsymbol{\widehat{BHC}} = \widehat{BAC} = \mathbf{20°}$$

$$\boldsymbol{\widehat{CHA}} = \widehat{AHB} + \widehat{BHC} = 50 + 20 = \mathbf{70°}$$

Exercice 9

Quelque soit la forme du triangle, les points A', B' et C' sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 10

1. *ABD est rectangle en D car [AB] est un diamètre du cercle circonscrit.*
2. *(AE) et (OD) sont perpendiculaires car E est l'orthocentre du triangle AOD (point d'intersection des deux droites (OH) et (DC) qui portent deux hauteurs du triangle).*

Exercice 11

Les droites (MM') et (OO') sont parallèles. Dans le triangle AMM', O et O' sont les milieux de deux côtés. Si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième côté.

Exercice 12

Les droites (CE) et (AF) sont perpendiculaires.
(FE) ^ (AC) et (AB) ^ (FC) donc E est l'orthocentre du triangle AFC, et (EC) porte donc la troisième hauteur.

Exercice 13

Il suffit de tracer:

1. *La médiatrice de [AC] ou de [AB] pour obtenir le centre O du cercle circonscrit à ACB.*
2. *La bissectrice de* $\widehat{ACK}$ *ou celle de* $\widehat{AKC}$ *pour obtenir le centre I du cercle inscrit dans ACK.*
3. *La médiane issue de G ou celle issue de M pour obtenir le centre de gravité J de AGM.*
4. *La perpendiculaire à (AG) passant par C ou la perpendiculaire à (AC) passant par G pour obtenir l'orthocentre H de ACG.*