Pythagore

La relation de Pythagore, activité préparatoire.

Rédiger en regard des dessins réalisés les calculs correspondants. Réaliser les figures aux instruments (compas, équerre) avec précision.

1°

Dessiner deux "grands" triangles rectangles, mesurer soigneusement les côtés (reporter les mesures sur la figure).

Calculer les expressions : "Carré d'un petit côté" + "carré de l'autre petit côté", puis "carré de l'hypoténuse", comparer les deux résultats.

2°

Dessiner deux "grands " triangles quelconques mesurer soigneusement les côtés (reporter les mesures sur la figure).

Calculer les expressions : "Carré d'un petit côté" + "carré de l'autre petit côté", puis "carré du plus grand côté". les résultats sont-ils aussi voisins que précédemment?

3°

Choisir deux longueurs a et b, par exemple 8 cm et 11 cm, calculer $a^2 ? b^2$, par exemple 64 + 121 = 185, afficher ce nombre $c^2 ? 185$ sur votre calculatrice et appuyer sur la touche $\sqrt{\ }$ (racine carrée), dans l'exemple on obtient c ? 13,60 cm.

Construire le triangle de côtés a, b et c. Ce triangle est-il rectangle ? Refaire cette activité avec d'autres triangles et essayer de conclure .

II Le triangle ABH est rectangle en H, BH = 1,5 cm et AB = 3,9 cm.
1°Construire ce triangle, calculer AH.
2° Sur la demi-droite [BH), construire le point C tel que AC = 6 cm (Donc H est entre B et C). Calculer CH, le périmètre et l'aire du triangle ABC.

I

théorème de Pythagore

V Le triangle DEF est rectangle en F, DF=36 mm, DE=85 mm, Calculer EF.
CORRIGE
DEF est rectangle en F
D'après l'énoncé de Pythagore :

ED^2 ? EF^2 ? DF^2

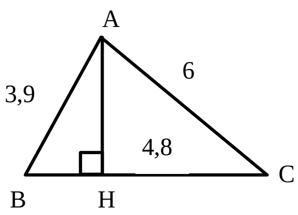
85^2 ? EF^2 ? 36^2

EF^2 ? 7225 ? 1296

EF^2 ? 5929

EF ? $\sqrt{5929}$? 77mm

(autres valeurs possibles pour le problème ci-dessous, voir après))



IV Le triangle ABC a pour hauteur AH; AB ? 3,9 cm AC ? 6 cm CH = 4,8 cm , calculer AH et BH, puis l'aire du triangle ABC.
CORRIGE
Le triangle AHC est rectangle en H, d'après l'énoncé de Pythagore :

AH^2 ? HC^2 ? AC^2
AH^2 ? $4,8^2$? 6^2
AH^2 ? 36 ? 23,04
AH^2 ? 12,96
AH ? $\sqrt{12,96}$? 3,6

De même, triangle AHB :

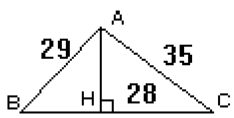
AH^2 ? BH^2 ? AB^2
$3,6^2$? BH^2 ? $3,9^2$
BH^2 ? 15,21 ? 12,96
BH^2 ? 2,25
BH ? $\sqrt{2,25}$? 1,5

AireABC ? $\frac{BC ? AH}{2}$
? $\frac{(1,5 ? 4,8) ? 3,6}{2}$
? $11,34cm^2$

Le triangle ABC a pour hauteur AH; AB = 29 AC = 35 CH = 28 .

Calculer AH et BH

Calculer l'aire du triangle ABC.



CORRIGE
I Le triangle AHC est rectangle en H, d'après l'énoncé de Pythagore :

AH^2 ? HC^2 ? AC^2

AH^2 ? 28^2 ? 35^2

AH^2 ? 1225 ? 784

AH^2 ? 441

$AH ? \sqrt{441} ? 21$

De même, triangle AHB :

$AH^2 ? BH^2 ? AB^2$

$HB^2 ? 21^2 ? 29^2$

$HB^2 ? 29^2 ? 21^2$

$HB ? \sqrt{400} ? 20$

Aire ABC=$\frac{BC ? AH}{2}$

$=\frac{(20 ? 28) ? 21}{2} ? 504$

Réciproque de l'énoncé de Pythagore

Le triangle de côtés 11 cm, 13 cm et 7 cm est-il rectangle ?

CORRIGE

Le plus grand côté mesure 13 cm

On calcule : $13^2 ? 169$ $11^2 ? 7^2 ? 121 ? 49 ? 170$

$169 ? 170$ donc la relation de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle de côtés 11 cm, 13 cm et 7 cm n'est pas rectangle.

triangle non rectangle dans un rectangle

On construira la figure. On écrira le raisonnement pour chaque réponse

ABCD est un rectangle de côtés $AB ? 12$ cm et $AD ? 9$ cm .

Sur le côté [BC] on place le point E tel que $AE ? 13$ cm. Sur le côté [DC] on place le point F tel que $DF ? 5$ cm .

1°

Calculer la longueur AF.

2°

Calculer la longueur BE.

3°

Calculer les longueurs CE et CF, puis la longueur EF.

4°

Le triangle AFE est-il rectangle ?

CORRIGE

Pour bien raisonner, dessiner la figure et n'y indiquer que les hypothèses. Puis indiquer au fur et à mesure les résultats trouvés

ABCD est un rectangle, donc ses angles sont droits.

1°

Le triangle ADF est rectangle en D, d'après l'énoncé de Pythagore :

$AF^2 ? AD^2 ? DF^2$

$AF^2 ? 9^2 ? 5^2$

$AF^2 ? 81 ? 25$

$AF^2 ? 106$

$AF ? \sqrt{106}$ cm

2°

Le triangle ABE est rectangle en B, d'après l'énoncé de Pythagore :

$AE^2 ? AB^2 ? BE^2$

$13^2 ? 12^2 ? BE^2$

$169 ? 144 ? BE^2$

$169 ? 144 ? BE^2$

$BE^2 ? 25$

$BE ? 5$ cm

3°

E? [BC] donc $CE ? BC ? EB ? 9 ? 5 ? 4$ cm

F? [CD] donc $CF ? CD ? DF ? 12 ? 5 ? 7$ cm

Le triangle ECF est rectangle en C ; d’après l’énoncé de Pythagore :

$EF^2 ? EC^2 ? CF^2$

$EF^2 ? 4^2 ? 7^2$

$EF^2 ? 16 ? 49 ? 65$

$EF ? \sqrt{65}$ cm

4°

Dans le triangle AEF, AE est le plus grand côté,

$AE^2 ? 169$ $AF^2 ? EF^2 ? 106 ? 65$

$AF^2 ? EF^2 ? 171$

donc $AE^2 ? AF^2 ? EF^2$

la relation de Pythagore n’est pas vérifiée, le triangle AEF n’est pas rectangle.

triangle non rectangle dans un carré

On construira la figure. On écrira le raisonnement et les calculs pour chaque réponse.

ABCD est un carré de côté 12 cm. Sur le côté [BC] on place le point E tel que $CE ? 3$ cm. Sur le côté [DC] on place le point F tel que $AF ? 13$ cm.

1°

Calculer les longueurs DF, EF et AE.

2°

Le triangle AEF est-il rectangle?

CORRIGE

Pour bien raisonner, dessiner la figure et n’y indiquer que les hypothèses.

ABCD est un carré, ses côtés ont pour longueur 12 cm et ses angles sont droits.

1°

Le triangle ADF est rectangle en D, d’après l’énoncé de Pythagore :

$AF^2 ? AD^2 ? DF^2$

$13^2 ? 12^2 ? DF^2$

$169 ? 144 ? DF^2$

$DF^2 ? 25$

$DF ? 5$

F? [DC] donc $FC ? DC ? EF ? 12 ? 5 ? 7$

Le triangle FCE est rectangle en C, d’après l’énoncé de Pythagore :

$FE^2 ? FC^2 ? CE^2$

$FE^2 ? 7^2 ? 3^2$

$FE^2 ? 58$

$FE ? \sqrt{58}$

E? [BC] donc $EB ? BC ? EC ? 12 ? 3 ? 9$

Le triangle ABE est rectangle en B, d’après l’énoncé de Pythagore :

$AE^2 ? AB^2 ? BE^2$

$AE^2 ? 12^2 ? 9^2$

$AE^2 ? 225$

$AE ? \sqrt{225} ? 15$

2°

Dans le triangle AEF, AE est le plus grand côté,

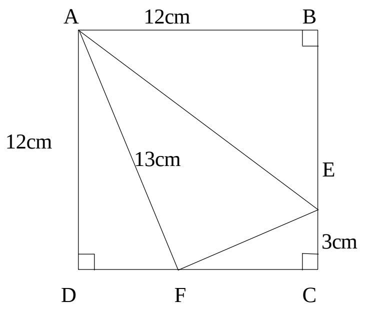
On calcule :

$AE^2 ? 225$ $AF^2 ? FE^2 ? 13^2 ? 58$

$AF^2 ? FE^2 ? 227$

donc $AE^2 ? AF^2 ? FE^2$

la relation de Pythagore n’est pas vérifiée, le triangle AEF n’est pas rectangle.



le triangle de côtés 1993, 1032 et 1705 est-il rectangle? justifier
CORRIGE
I Je calcule 1 993^2=3 972 049
puis 1 032^2+1 705^2
=1 065 024+2 907 025
=3 972 049
donc 1 993^2=1 032^2+1 705^2
D'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle est rectangle et son hypoténuse mesure 1 993.,

Le triangle de côtés 1,5 ; 1,12 et 1,14 est-il rectangle ?

Le plus grand côté mesure 1,5, on calcule :
$1,5^2$=2,25 $1,12^2$+$1,14^2$=2,554
$1,5^2$?$1,12^2$+$1,14^2$ donc la relation de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle

Réciproque de Pythagore et aires du triangle rectangle
1° Construire le triangle ABC tel que CB=169mm, AB=65mm et AC=156mm.
2° Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
Calculer l'aire du triangle ABC.
3° Tracer la hauteur AH du triangle ABC.
a) En utilisant une autre expression qu'en 2° de l'aire de ABC, calculer simplement AH.
b) Calculer CH et HB.
CORRIGE
1° *Utiliser le compas, garder le mm comme unité. (on ignore que le triangle est rectangle, donc on n'utilise ni équerre, ni demi cercle)*
2° *Rédiger dans le bon ordre.*
BC est le plus grand côté, on calcule :
$BC^2 ? 169^2 ? 28561$

$BA^2 ? AC^2 ? 65^2 ? 156^2$
$? 4225 ? 24336 ? 28561$

donc $BC^2 ? BA^2 ? AC^2$
(La relation de Pythagore est vérifiée dans le triangle ABC),d'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
$\text{AireABC} ? \frac{BA ? AC}{2}$
$? \frac{65 ? 156}{2} ? 5070 \text{ mm}^2$

3° *Revoir la définition, utiliser l'équerre.*

$$\text{AireABC} ? \frac{BC ? AH}{2}$$

$$5070 ? \frac{169 ? AH}{2}$$.

$$5070 ? 2 ? 169 ? AH$$

$$AH ? \frac{5070 ? 2}{169} ? 60\,\text{mm}$$

Enoncé de Pythagore et théorème de la médiane.

variante du suivant sans racines carrées

V Tracer un demi-cercle de diamètre BC=13 cm. Placer sur ce cercle un point A tel que AB=12 cm.

1° Expliquer pourquoi le triangle ABC est rectangle en A.

2° Calculer AC et l'aire du triangle ABC.

3° Tracer la hauteur AH du triangle ABC. Exprimer l'aire du triangle ABC en utilisant AH et BC puis calculer AH.

4°Déterminer l'angle ABC à 0,01° près.

CORRIGE

V *(Utiliser le compas pour placer le point A)*

1° Le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle de diamètre BC donc il est rectangle en A.

2° Le triangle ABC est rectangle en A, d'après l'énoncé de Pythagore :

$$AB^2 ? AC^2 ? BC^2$$

$$12^2 ? AC^2 ? 13^2$$

$$AC^2 ? 169 ? 144 ? 25$$

$$AC ? \sqrt{25} ? 5\text{cm}$$

Aire de ABC=

$$\frac{AB ? AC}{2} ? \frac{12 ? 5}{2} ? 30\text{cm}^2$$

3° De même :

$$\text{AireABC} ? \frac{AH ? BC}{2}$$

$$30\text{cm}^2 ? \frac{AH ? 13}{2}$$

$$AH ? \frac{2 ? 30}{13} ? \frac{60}{13}\text{cm}$$

4° Le triangle ABC est rectangle en A :

$$\cos ABC ? \frac{BA}{BC} ? \frac{12}{13}$$

à la calculatrice

$$ABC ? 22{,}62?$$

V Tracer un cercle de diamètre BC=7 cm. Placer sur ce cercle un point A tel que AB= 6 cm.

1° Expliquer pourquoi le triangle ABC est rectangle en A.

2° (Sans utiliser le cosinus) Calculer AC et l'aire du triangle ABC (On indiquera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 0,01 près).

3°Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. Calculer AH par la méthode la plus simple possible.

4°Déterminer l'angle ABC à 0,01° près, puis la longueur BH.

CORRIGE

V (Utiliser le compas pour placer le point A)

1° Le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle de diamètre BC donc ABC est rectangle en A.

2° Le triangle ABC est rectangle en A, d'après l'énoncé de Pythagore :

$BC^2=AB^2+AC^2$

$49=36+AC^2$

$AC^2=49-36=13$

$AC ? \sqrt{13} ? 3{,}61\,cm$

Aire de ABC= $\frac{AB ? AC}{2} ? \frac{6 ? \sqrt{13}}{2} ? 3 ? \sqrt{13} ? 10{,}82cm^2$

3° Aire ABC = $\frac{AH ? BC}{2}$

$3\sqrt{13} ? \frac{AH ? 7}{2}$

$3\sqrt{13} ? 3{,}5AH$

$AH ? \frac{3\sqrt{13}}{3{,}5} ? \frac{6\sqrt{13}}{7}$

AH ? 3,09 cm

4° cos ABC=$\frac{AB}{AC} ? \frac{6}{7}$ ABC ? 31,00°

cos ABC=$\frac{BH}{BA} ? \frac{6}{7}$ $\frac{BH}{6} ? \frac{6}{7}$ $BH ? \frac{36}{7} ? 5{,}14cm$

L'équerre d'onglet ONLIT

L'objet ONLIT représenté (figure grisée) est un outil de menuisier appelé « équerre d'onglet » qui permet de dessiner plusieurs angles souvent utilisés.

OGLT est un rectangle.

$OG ? TL ? 12cm$; $OT ? GL ? 8cm$; $IT ? TE ? EI ? EL ? 6cm$.

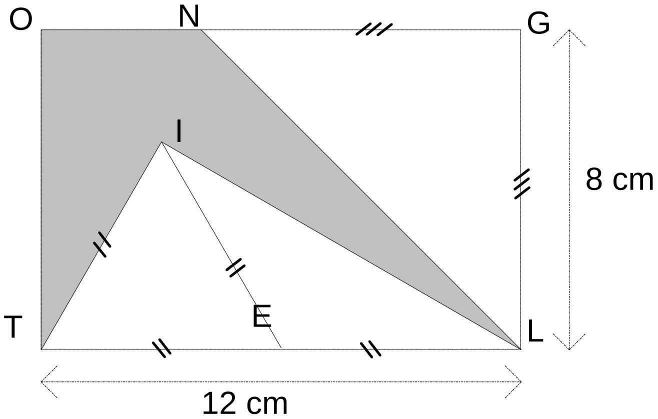
1° Reproduire l'objet représenté ci-dessous aux dimensions réelles.

2° En utilisant les hypothèses indiquées sur la figure, démontrer que le triangle TIL est rectangle. Calculer IL et l'aire du triangle TIL.

3° Calculer l'aire du triangle NGL et l'aire de l'équerre d'onglet.

4° Calculer NL et le périmètre de l'équerre d'onglet.

5° Indiquer en la justifiant la mesure des angles OTI, ILN et LNO.



CORRIGE

Contrôler au fur et à mesure les résultats sur la figure. D'autres démonstrations existent. Eviter d'utiliser cosinus lorsque dans un triangle rectangle on connaît deux côtés. Indiquer toujours les valeurs exactes

1° *Utiliser le quadrillage de la feuille, indiquer la légende sur le dessin.*

2° *(Vous ignorez que le triangle TIL est rectangle, il faut donc en donner la raison qui apparaît sur le dessin).*

Par hypothèse, la médiane IE du triangle TIL est égale à la moitié du côté TL correspondant.

D'après le théorème de la médiane, le triangle TIL est rectangle en I.

Le triangle TIL est rectangle en I : d'après l'énoncé de Pythagore :

$IT^2 ? IL^2 ? TL^2$

$6^2 ? IL^2 ? 12^2$

$IL^2 ? 144 ? 36 ? 108$

$IL ? \sqrt{108} ? 10{,}39\ cm$

$\text{AireTIL} ? \frac{TI ? IL}{2}$

$\text{AireTIL} ? \frac{6\sqrt{108}}{2}$

$\text{AireTIL} ? 3\sqrt{108} ? 31{,}18\ \text{cm}^2$

3° $\text{AireNGL} ? \frac{NG ? GL}{2}$

$\text{AireNGL} ? \frac{8 ? 8}{2} ? 32\ \text{cm}^2$

Aire de ONLIT = aireOGLT-aireNGL-aireTIL

$8 ? 12 ? 32 ? 3\sqrt{108}$

$? 64 ? 3\sqrt{108} ? 32{,}82\ \text{cm}^2$

4° Le triangle NGL est rectangle en G, d'après l'énoncé de Pythagore :

$NL^2 ? NG^2 ? GL^2$

$NL^2 ? 2 ? 8^2 ? 128$

$NL ? \sqrt{128} ? 11{,}31\ \text{cm}$

Périmètre ONLIT

$? ON ? NL ? LI ? TO$

$? (12 ? 8) ? \sqrt{128} ? \sqrt{108} ? 6 ? 8$

$? 18 ? \sqrt{128} ? \sqrt{108} ? 39{,}71\text{cm}$

5° Le triangle NGL est rectangle isocèle en G donc ses angles à la base mesurent 45° :

$GNL ? GLN ? 45?$

Le triangle ITE est équilatéral donc ses angles mesurent 60°.

Les angles aigus du triangle rectangle ITL sont complémentaires donc :

$ITL ? ILT ? 90?$

$60?? ILT ? 90?$

$ILT ? 90?? 60?$

$ILT ? 30?$

Les angles OTI et ITL sont adjacents complémentaires donc

$OTI ? 90?? ITL$

$OTI ? 90?? 60?$

$OTI ? 30?$

De même :

$GLT ? GLN ? ILN ? ILT$

$ILN ? GLT ? GLN ? ILT$

$ILN ? 90?? 45?? 30?$

$ILN ? 15?$

LNO et LNG sont adjacents supplémentaires donc

LNO =180°-LNG =180°-45°

LNO =135°

théorème de la médiane

Le triangle ABC est rectangle en B et le triangle ADC est rectangle en D. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre.

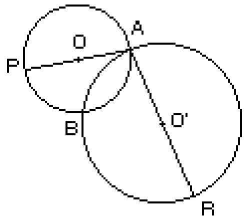
CORRIGE

Les triangles rectangles ABC et ADC sont inscrits dans un cercle de diamètre leur hypoténuse AC. les points A,B,C et D sont donc sur le cercle de diamètre [AC] et de centre le milieu de [AC].

théorème de la médiane

Deux cercles C et C' (de rayons différents), de centres respectifs O et O' se coupent en A et B. La droite (AO) coupe le cercle C en P. La droite AO' coupe le cercle C' en R. Que peut-on dire du triangle ABP? Et du triangle ABR?

Montrer que les points P, B et R sont alignés.



CORRIGE

Le triangle ABP est inscrit dans un demi cercle de diamètre le côté AP, donc ABP est rectangle en B.

De même (diamètre AR) le triangle ABR est rectangle en B.

Les droites (PB) et (BR) sont perpendiculaires à la droite (AB) donc elles sont parallèles, elles ont le point B en commun, donc elles sont confondues, donc P, B et R. sont alignés