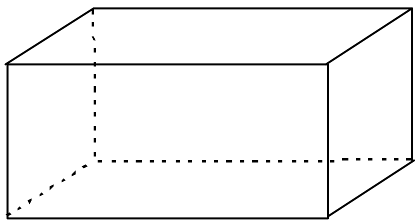
Chapitre 12
Solides et volumes

12.1.OBSERVATION; DESCRIPTION

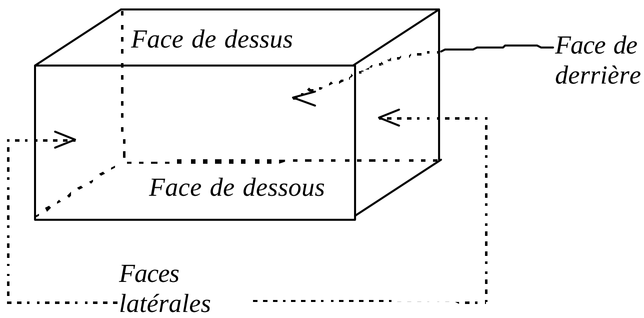
*Un **solide**, au sens géométrique, est un objet limité par des surfaces indéformables. Ces surfaces si elles sont planes sont des faces. Mais il y a beaucoup de solides qui n'ont pas de surface plane. La plus évidente est la boule.*
*Le **volume** d'un solide est un nombre associé à ce solide (nous y reviendrons)*
*L'étude porte cette année sur les solides les plus simples : le **pavé** (aussi appelé parallélépipède rectangle) et un de ses cas particuliers : le **cube** .*



Un pavé pourrait être considéré comme un empilement de rectangles tous identiques.
C'est ce qui se passe pour un livre, par exemple, puisque chaque feuille est un rectangle; et c'est la quantité de feuilles correctement empilées qui fait apparaître le solide qui a la forme d'un pavé.

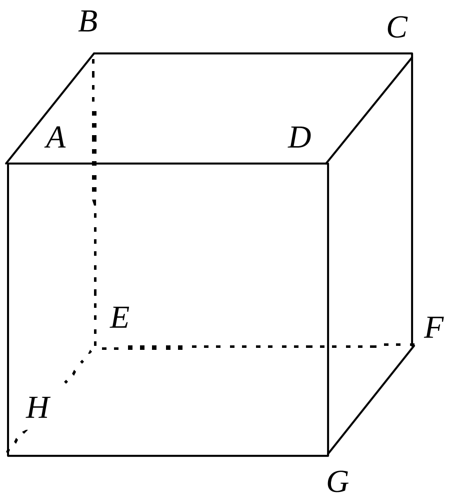
*Un pavé est délimité par **6 faces** qui sont des rectangles superposables deux à deux.*
*Chaque côté d'une face est aussi côté d'une autre face. Pour le solide, ces segments s'appellent des **arêtes.** Un pavé compte 12 arêtes.*
De plus, on compte 8 sommets.

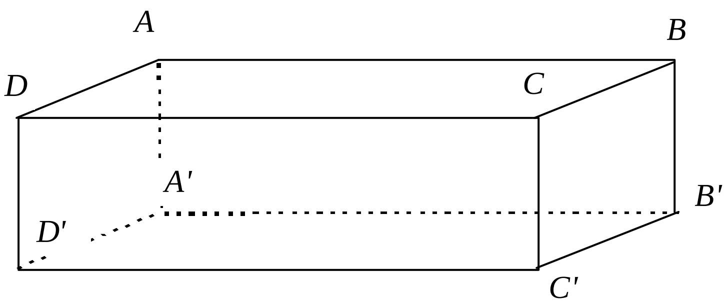
Selon la manière dont il est présenté, le même pavé peut avoir des allures différentes. C'est pourquoi, il est toujours gênant de parler de base, de longueur, largeur ou hauteur, tout dépendra de sa représentation.
Par exemple, dans la présentation ci-dessous, on adopte un vocabulaire qui rend compte de ce que l'on voit.



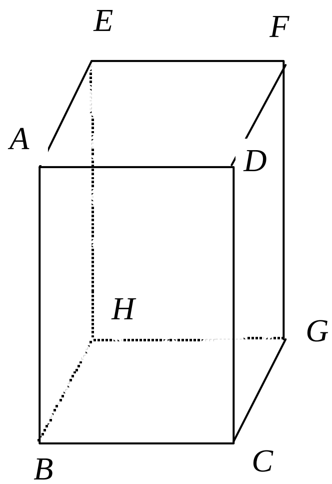
Exercice 1

Faire la liste des faces, des arêtes et des sommets des pavés suivants :





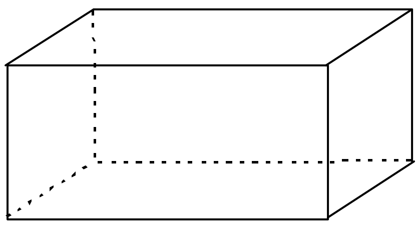
Exercice 2



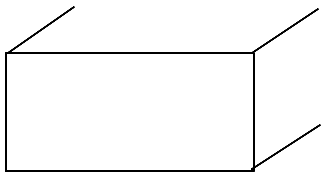
La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle.

1. *Nommer deux faces contenant l'arête [AB].*
2. *Nommer trois arêtes contenant le sommet C.*
3. *Nommer deux arêtes parallèles.*
4. *Nommer quatre arêtes de même longueur.*

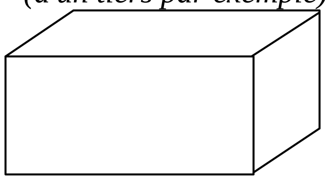
12.2. REPRESENTATION EN PERSPECTIVE



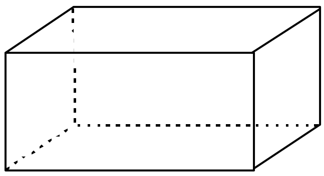
Si l'on veut représenter un solide, un certain nombre de ***conventions*** *sont à respecter pour que le dessin soit compris par tous.*



- *La face avant est représentée en premier par un rectangle à une certaine échelle.*
- *Parmi les arêtes des autres faces, trois semblent fuir vers l'arrière, en oblique. On les dessine en deuxième, parallèles et de même longueur. Mais pour garder la notion de distance due à l'éloignement, on va réduire un peu ces longueurs (d'un tiers par exemple).*



- *Les deux arêtes visibles de la face arrière sont dessinées en trait plein ensuite.*

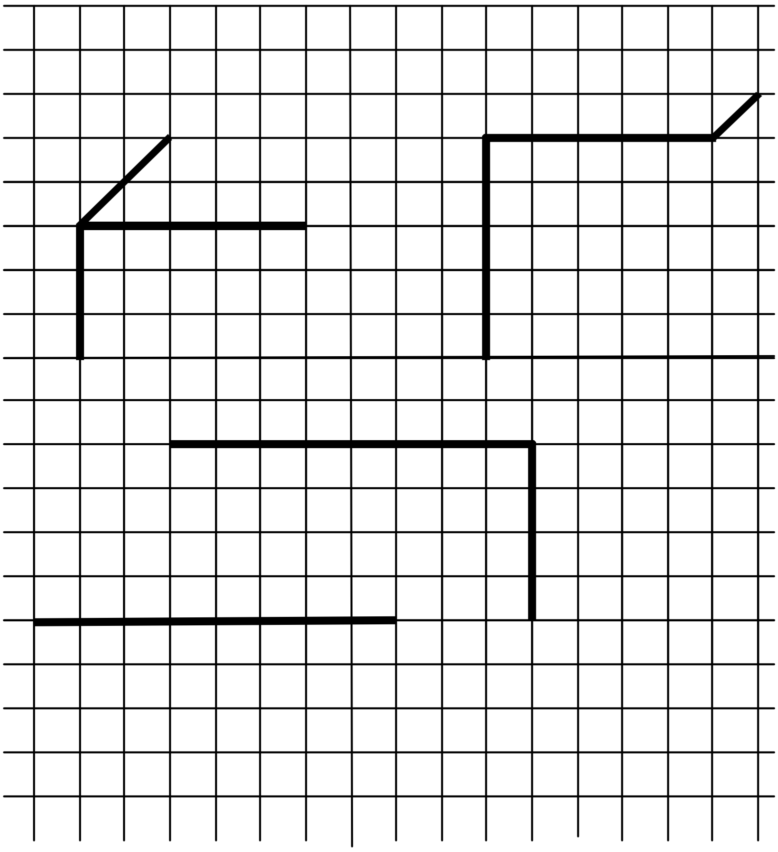


- *Enfin les arêtes cachées sont dessinées en trait pointillé. La face arrière apparaît alors comme un rectangle superposable à la face de devant.*

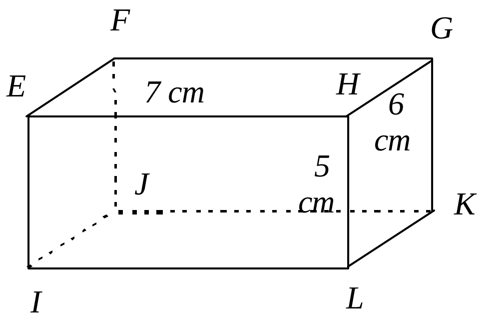
Ce type de dessin porte le nom de ***perspective cavalière****.*
Ces conventions sont différentes de ce que l'on peut voir sur une photographie. En effet sur une photo, les droites parallèles fuyant vers le "fond" de la photo semblent se rapprocher comme les rails parallèles d'une ligne de chemin de fer.

Exercice 1

Terminer les dessins en perspective des pavés suivants :



Exercice 2



Voici la représentation en perspective cavalière d'un pavé EFGHIJKL.

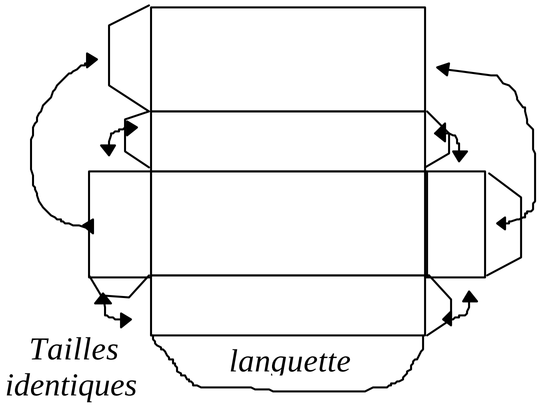
1. *Représenter ce pavé en choisissant EFGH comme face avant et FJKG comme face du dessus.*
2. *Représenter ce pavé en choisissant HGKL comme face avant et GKFJ comme face de côté.*
3. *Représenter ce pavé en choisissant EFGH comme face avant et EFJI comme face du dessus.*

12.3. PATRON DU PAVE DROIT

Un développement que l'on appelle aussi **patron** *du solide, est la surface construite sur papier qui permet, après pliage et collage, de réaliser le solide.*

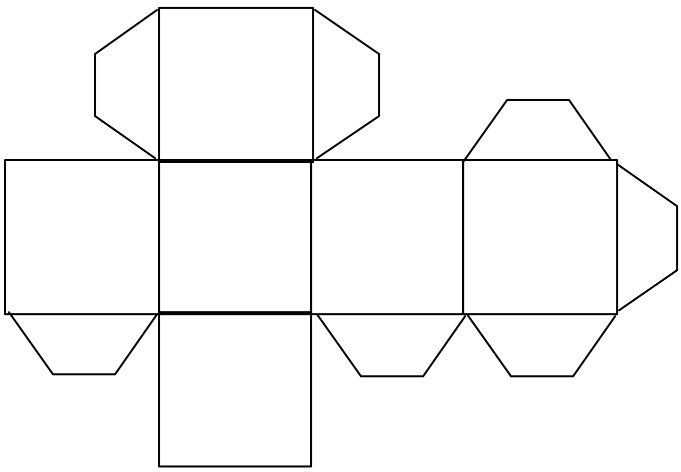
Quand on ouvre certaines boîtes ayant la forme d'un pavé, on s'aperçoit qu'il y a des languettes pour tenir la boîte fermée et permettre un collage facile. Ces languettes ne sont pas des faces du pavé. Si on découpe ces languettes, on peut ouvrir complètement la boîte et on obtient ce que l'on appelle le patron du pavé.

Le point essentiel dans la confection d'un patron est la disposition correcte des différentes faces afin qu'elles se recollent parfaitement après pliage.



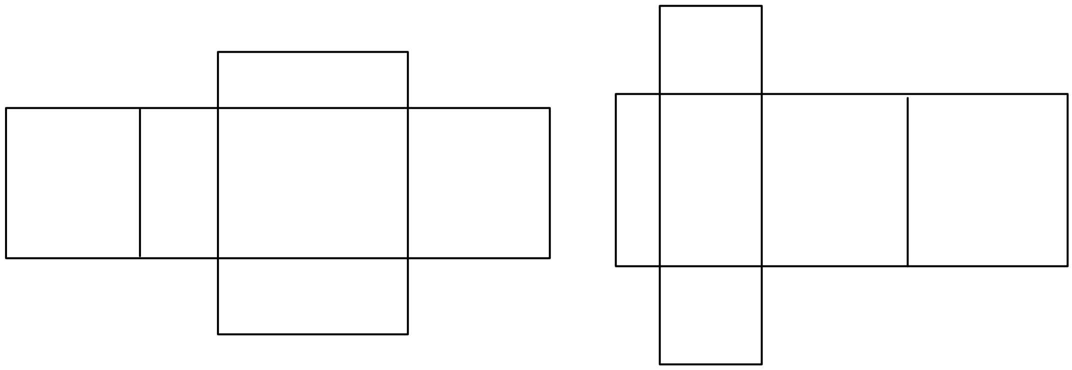
Le patron permet d'étudier les six faces du pavé et de comprendre lorsque l'on réalise la construction du solide que les faces sont deux à deux égales, et comment sont placées les arêtes de même longueur.(ce qui est signalé par les doubles flèches sur le dessin).

Pour un cube, le problème est plus simple, car les six faces sont six carrés identiques. En voici un exemple :



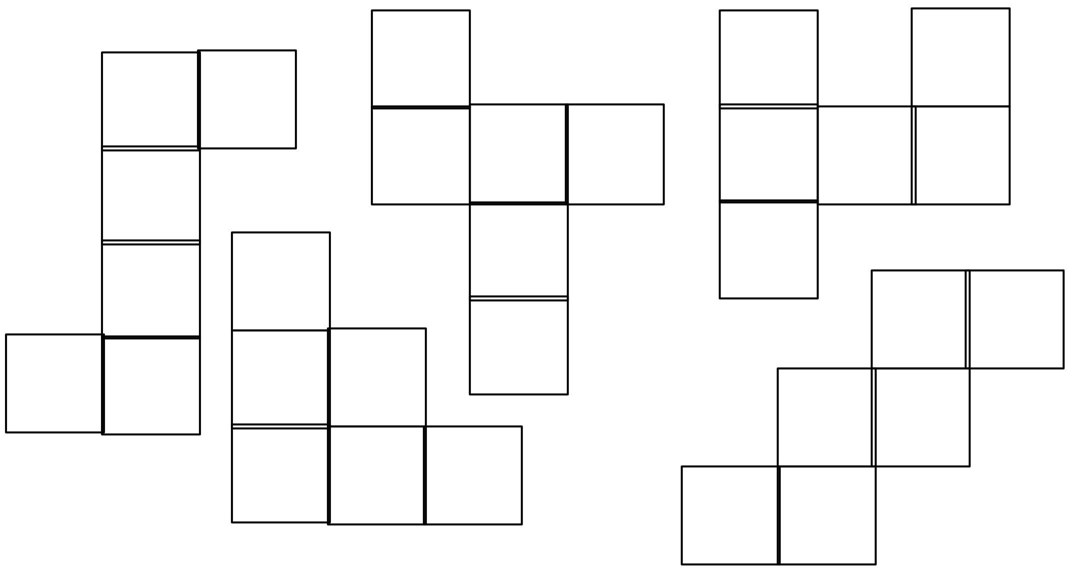
Exercice 1

Ces deux patrons permettent-ils de réaliser la construction de pavés?



Exercice 2

Parmi les figures suivantes, lesquelles sont les patrons d'un cube?

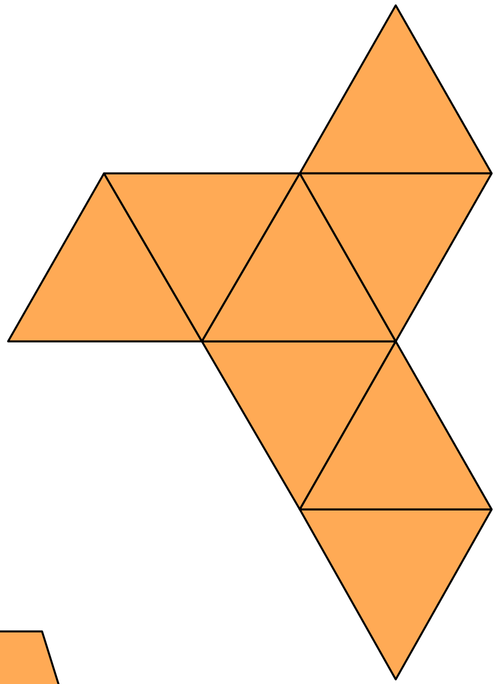


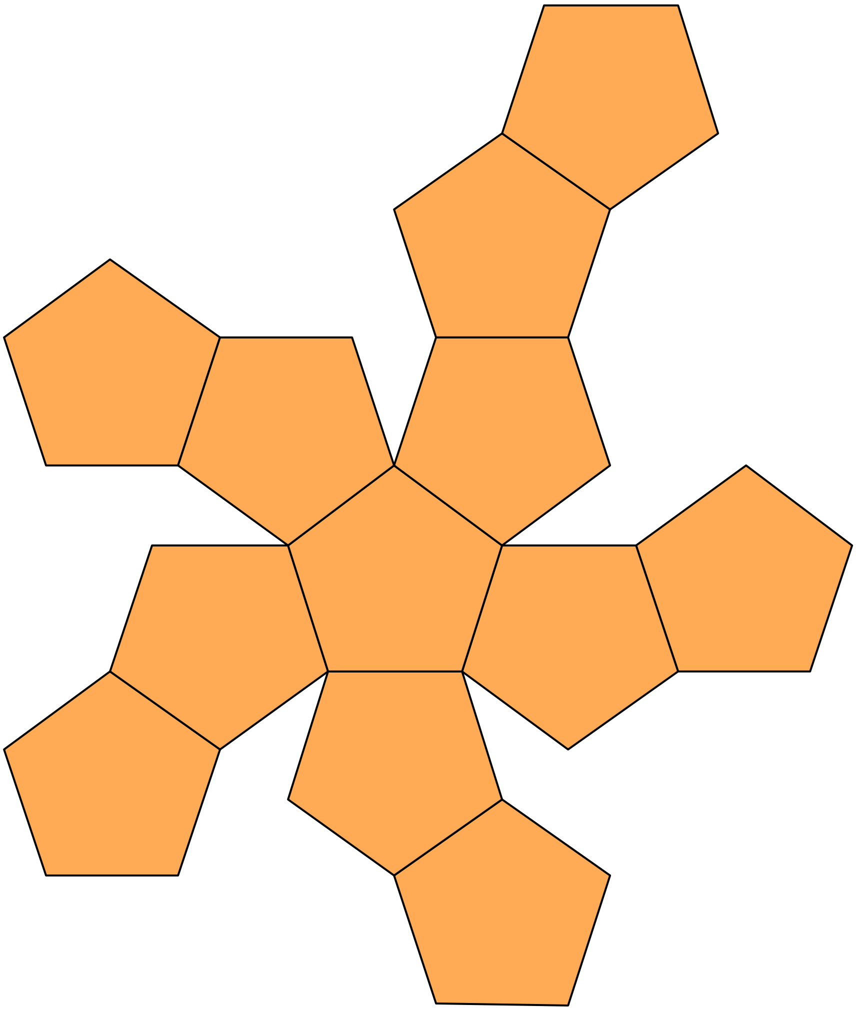
Exercice 3

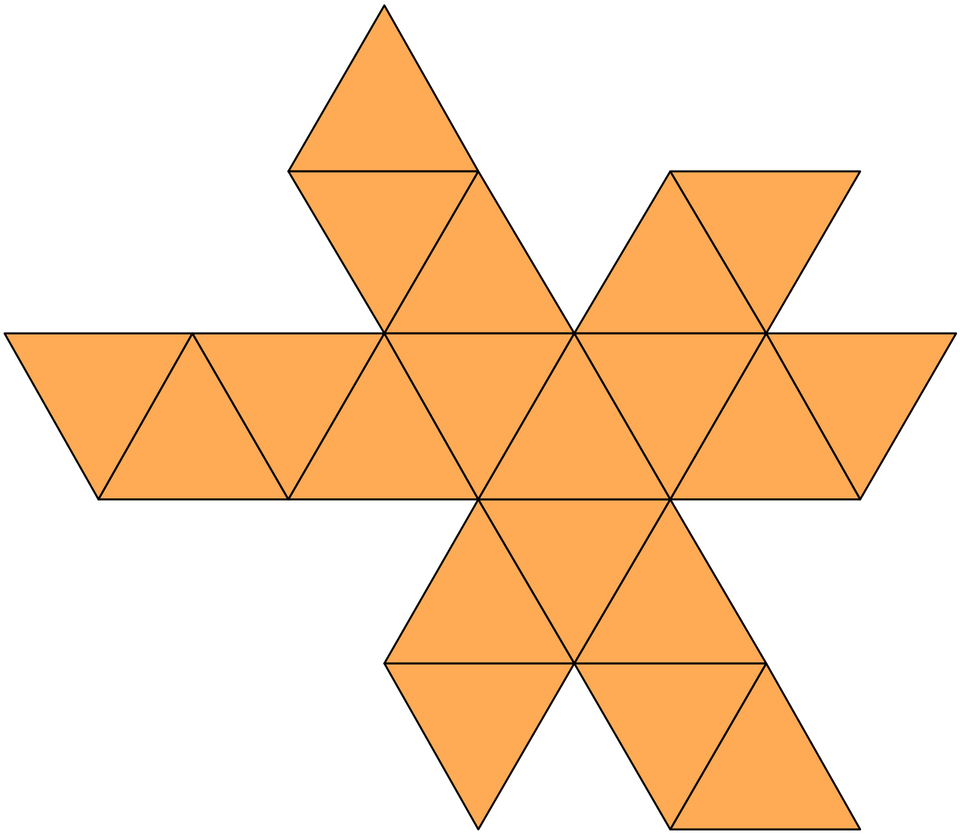
Réaliser le patron d'un pavé dont les dimensions sont 5 cm, 6 cm et 8 cm.
Réaliser le patron d'un cube de 5 cm d'arête.

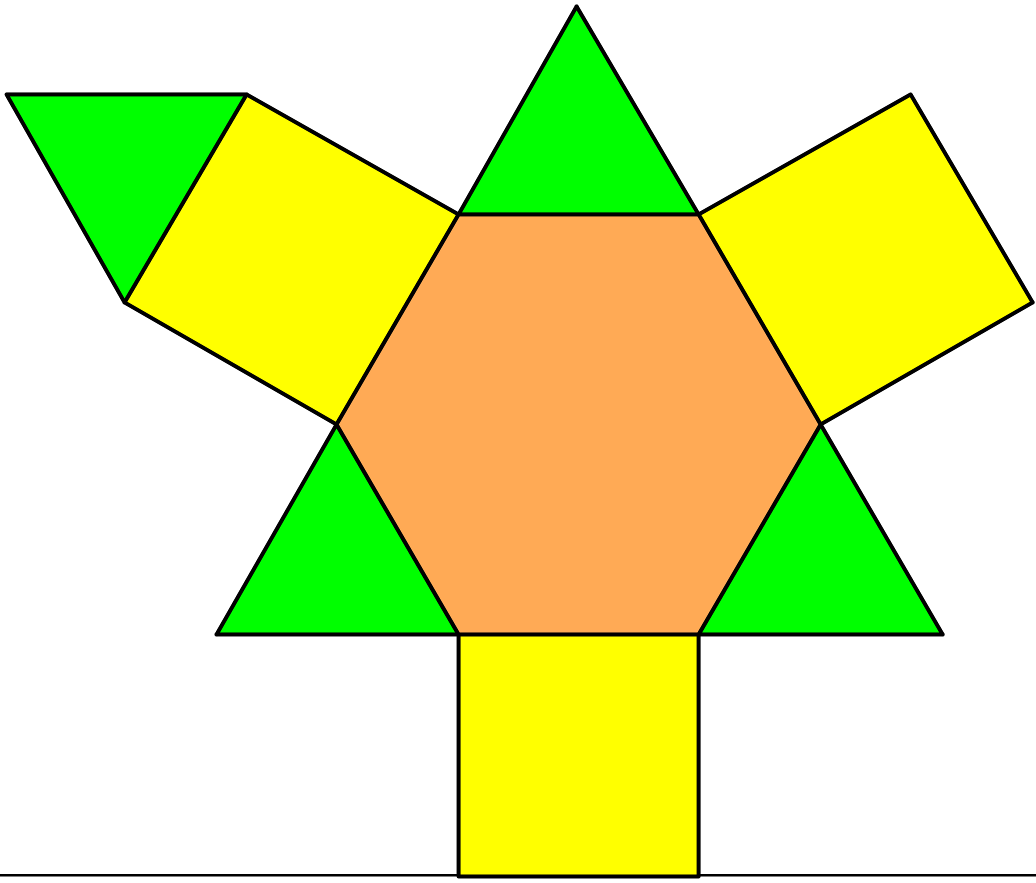
D'autres patrons de solides

Découper ou reproduire ces patrons pour fabriquer d'autres solides moins évidents que le cube ou le pavé.
Penser à placer les languettes qui serviront au collage des faces



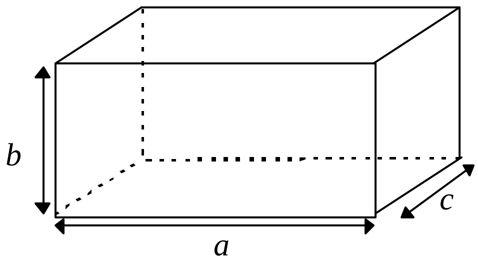






12.4. AIRE D'UN SOLIDE

Un solide(pavé ou cube), comme nous l'avons vu, est constitué de faces planes qui sont des rectangles ou des carrés. On appelle aire du solide l'aire totale des six faces .
Pour le pavé qui est constitué de trois paires de triangles, on peut faire la somme de toutes ces aires. On appelle a, b et c les trois dimensions du pavé.



Il y a deux rectangles dont les dimensions sont a et b, et dont l'aire vaut a ´ b
Il y a deux rectangles dont les dimensions sont a et c, et dont l'aire vaut a ´ c
Il y a deux rectangles dont les dimensions sont b et c, et dont l'aire vaut b ´ c
Soit au total : 2 ´ a ´ b + 2 ´ a ´ c + 2 ´ b ´ c ou ***2 ´ (ab + ac + bc)***

Dans un cube où les six faces sont des carrés de côté a (comme arête), l'aire totale est égale à : ***6 ´ a².***

Exercice 1

Les arêtes d'un pavé ont pour longueur 7,5 cm ; 5,2 cm et 4,8 cm.
Calculer la longueur totale des arêtes .
Calculer l'aire totale des faces.

Exercice 2

Les arêtes d'un pavé ont pour longueur 12 cm ; 2,5 cm et 7 cm.
Calculer la longueur totale des arêtes .
Calculer l'aire totale des faces.

Exercice 3

Les arêtes d'un cube ont pour longueur 8 cm.
Calculer leur longueur totale et l'aire totale des faces.
Faire de même avec des arêtes de 2,5 cm.

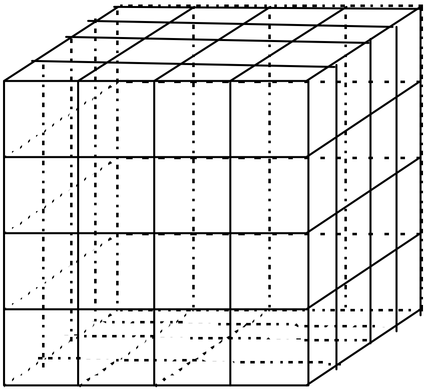
Exercice 4

La longueur totale des arêtes d'un cube est de 60 cm. Quelle est la longueur d'une arête? Quelle est l'aire d'une face?

Exercice 5

Une salle de séjour a la forme d'un pavé; ses dimensions sont 9,5 m de longueur et 6 m de largeur. La hauteur des murs est 2,40 m. On veut peindre trois des quatre murs. Donner un encadrement de la surface à peindre.
Un litre de peinture couvre 16 m². Combien faut-il prévoir de pots de 3 litres pour être sur de pouvoir peindre les trois murs ?

12.5. UNITES DE VOLUME



Ce cube est formé de cubes plus petits .
Il est composé de quatre couches superposées qui sont formées chacune de 16 (4 ´ 4) cubes. Il y a donc 64 (4 ´ 4 ´ 4) petits cubes dans le grand.
On peut donc dire que lorsque l'on multiplie les dimensions d'un cube par 4, le volume est 64 (4^3) fois plus grand.

De la même manière, si on multiplie les dimensions d'un cube par 10, le volume sera 1 000 fois plus grand. C'est pourquoi on peut dresser le tableau de conversion suivant :

hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
0,000001	0,001	1	1 000	1 000 000	1 000 000 000

Il existe un autre système d'unités qui est utilisé couramment pour les liquides que contiennent les solides. On les appelle les unités de capacité. La principale est le litre.
Un litre est la contenance d'un solide de volume 1 $dm^{3.}$.

m^3	dm^3	cm^3
1 000 l	1 l	1 ml

Ces unités sont chacune dix fois plus grande que celle qui lui est juste inférieure.

hl	dal	l	dl	cl	ml
0,01	0,1	1	10	100	1 000

Exercice 1

Ranger par ordre croissant:
127 cm^3 46 m^3 0,25 dm^3 6 200 cm^3 580 000 mm^3

Exercice 2

Effectuer :
25 dm^3 + 420 cm^3 + 0,072 m^3
568 dm^3 - 7 500 cm^3

Exercice 3

Exprimer en litres les mesures suivantes :
430 cm^3 36 dm^3 52 000 mm^3

Exercice 4

Exprimer en dm^3 les mesures suivantes :
3,75 hl; 540 dal; 3570 dl; 480000 ml

Exercice 5

Compléter les égalités suivantes :

18,4 l = dm^3 *82 cm^3 = ml*
800 hl = m^3 *70 cl = dm^3*
5m^3 = hl *280 cl = dm^3*

Exercice 6

Ranger les volumes suivants par ordre décroissant :
3 l 400 cm^3 350 ml 4,5 dl

Exercice 7

On a rassemblé 3 pavés droits de volumes : 13,24 m^3 , 175,6 m^3 , 3 200 cm^3 . Quel est le volume du solide obtenu ?

Exercice 8

Dans un cube de 153,1 dm^3 , on creuse un trou de 5260 cm^3 .Quel est le volume du solide restant ?

Exercice 9

Une citerne est un cube de 1,2 m d'arête . Cette citerne est remplie aux trois quarts après une pluie . Combien d'arrosoirs de 15 litres le jardinier peut -il emplir avec l'eau de la citerne ?

Exercice 10

Combien faudrait - il de seaux de 12 litres pour vider un bassin parallélépipédique rempli aux trois quarts et dont les dimensions sont 1,2 m ; 80 cm et 60 cm ?

12.6. CALCUL DU VOLUME DU PAVE

Mesure le volume d'un solide, c'est déterminer le nombre de volumes unité que l'on peut placer dans ce solide.
Si l'on place trois cubes côte à côte, on obtient une bande de trois cubes. Si l'on accole quatre bandes identiques, on obtient une épaisseur de 12 cubes. si l'on entasse 5 épaisseurs identiques, on obtient un gros cube de 60 petits cubes.
Si l'on prend le petit cube pour unité, le volume du gros cube ainsi formé est 60.

Le volume d'un cube s'obtient en calculant le produit a ´ a ´ a qui s'écrit plus simplement sous la forme de puissances : **$V = a^3$** *où a est la longueur de l'arête.*
c'est parce que ce calcul permet de connaître le volume d'un cube qu'on lui donne le nom de ***cube de a****.*

Il est utile de connaître la valeur du cube des premiers nombres entiers :

a	1	2	3	4	5	6
a^3	1	8	27	64	125	216

Le ***volume d'un pavé*** *s'obtient en calculant le produit* ***a ´ b ´ c*** *où a, b et c sont les trois dimensions du pavé.*

Exercice 1

Quel est le volume d'un cube dont l'arête a pour longueur 7 cm ?

Exercice 2

Une citerne est un cube de 1,25 m d'arête . Après une pluie cette citerne est remplie aux quatre cinquièmes. Combien de litres d'eau contient - elle ?

Exercice 3

Quel est le volume d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 8 cm , 7 cm , 9 cm ?

Exercice 4

Il est tombé 70 cm de neige dans une cour de 15 m sur 30 m . Calculer le volume de neige recouvrant la cour ?

Exercice 5

On a répandu une couche de cailloux de 8 cm d'épaisseur sur une route droite de 150 m de longueur et 4 m de largeur .Combien de voitures de 0,8 m^3 de cailloux a t - il fallu pour effectuer ce travail ?

Exercice 6

Un robinet débite 26 litres d'eau par minute. Combien de temps lui faut - il pour remplir un réservoir ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont : 1,2 m ; 1,4 m ; 0,75 m .

Exercice 7

Pour aérer une pièce , longue de 10,45 m , large de 6,7 m et haute de 3,1 m , on utilise un ventilateur brassant 35 litres d'air par seconde .
Quel est le volume de la pièce ?
Quel temps faudra t-il pour renouveler complètement l'air contenu dans cette pièce ?

Exercice 8

On veut empierrer une route de 15 m de long et de 9 m de large sur une épaisseur de 20 cm . La livraison est effectuée par des bennes de 4 m^3 .
Combien de voyages sont nécessaires ?

Exercice 9

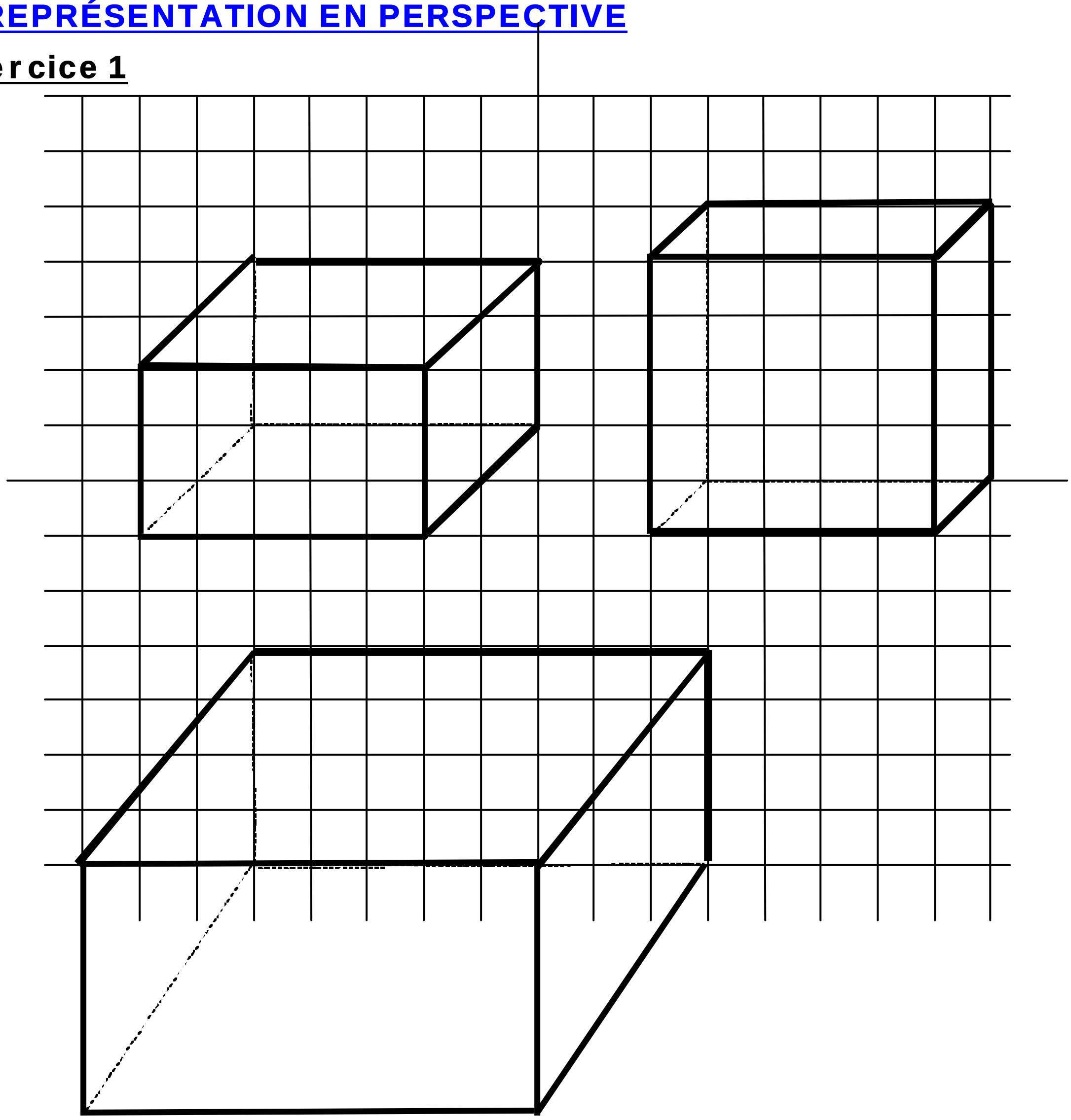
Un pavé droit a pour volume 39,78 m^3 . Les dimensions de sa base sont 1,5 m et 3,4 m . Quelle est sa hauteur ?

CORRIGES DES EXERCICES DU CHAPITRE 12

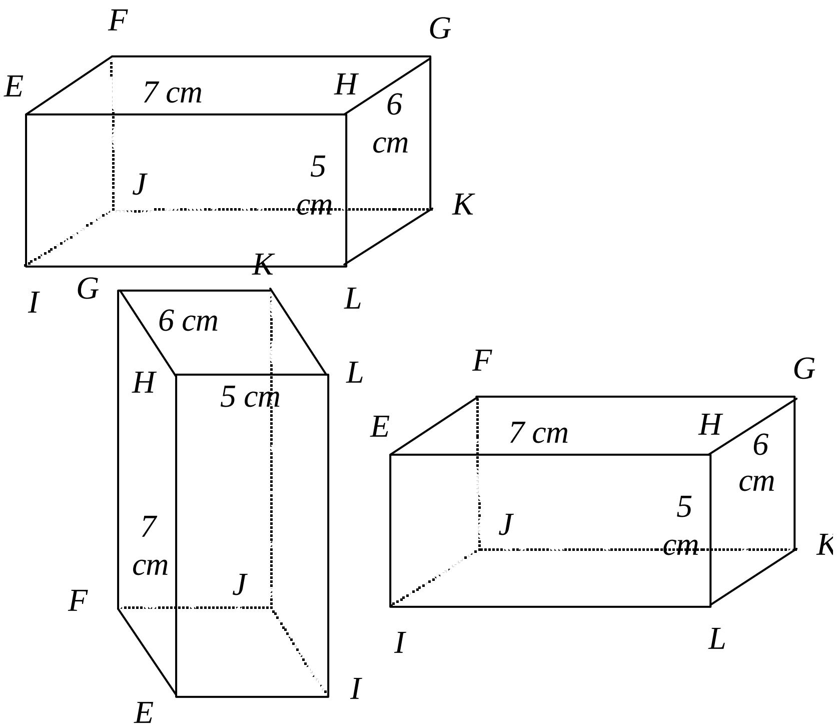
1. OBSERVATION; DESCRIPTION

2. REPRÉSENTATION EN PERSPECTIVE

Exercice 1

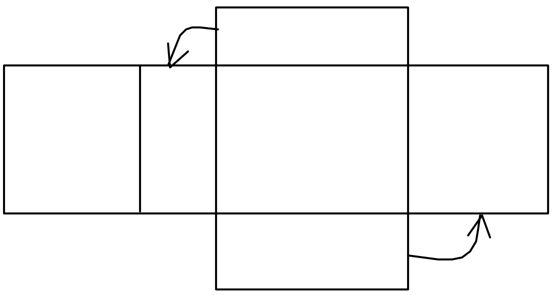


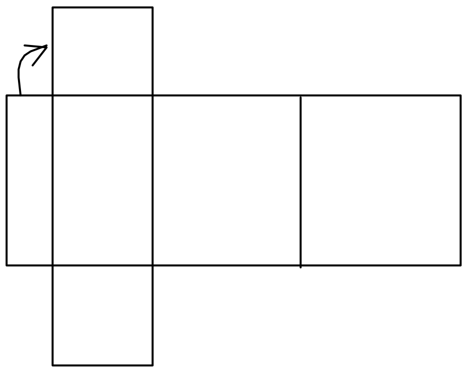
Exercice 2



3. PATRON DU PAVÉ DROIT

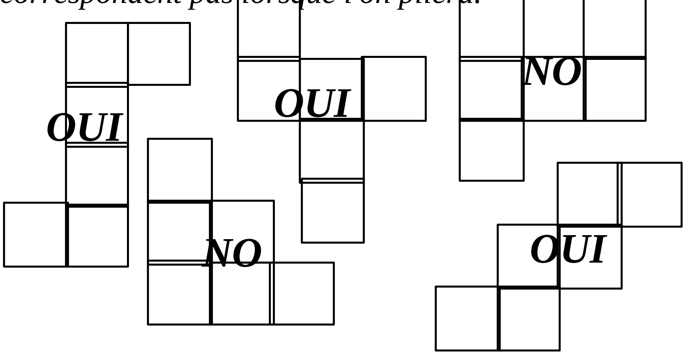
Exercice 1



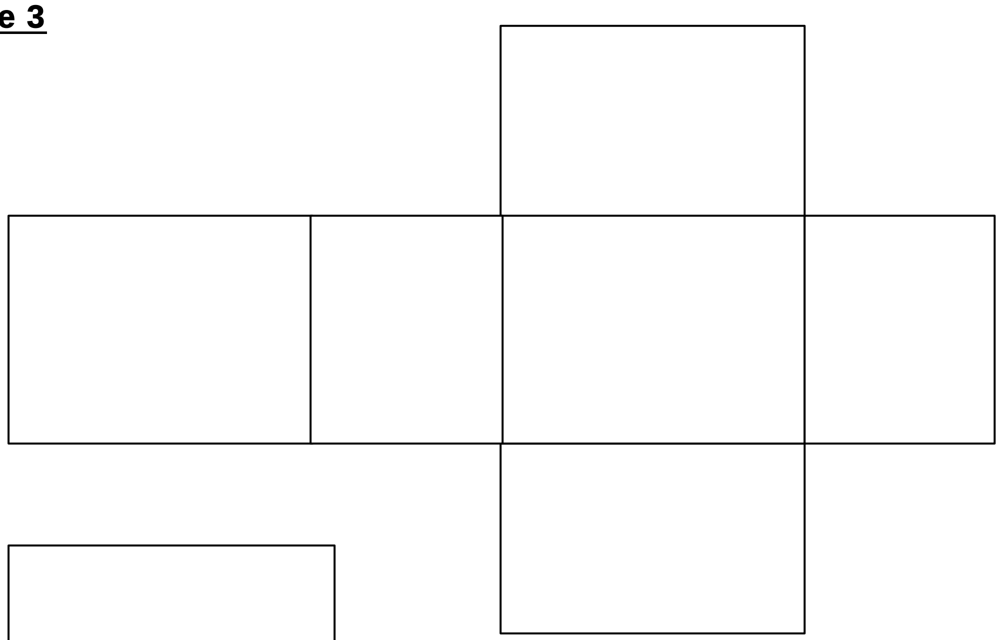


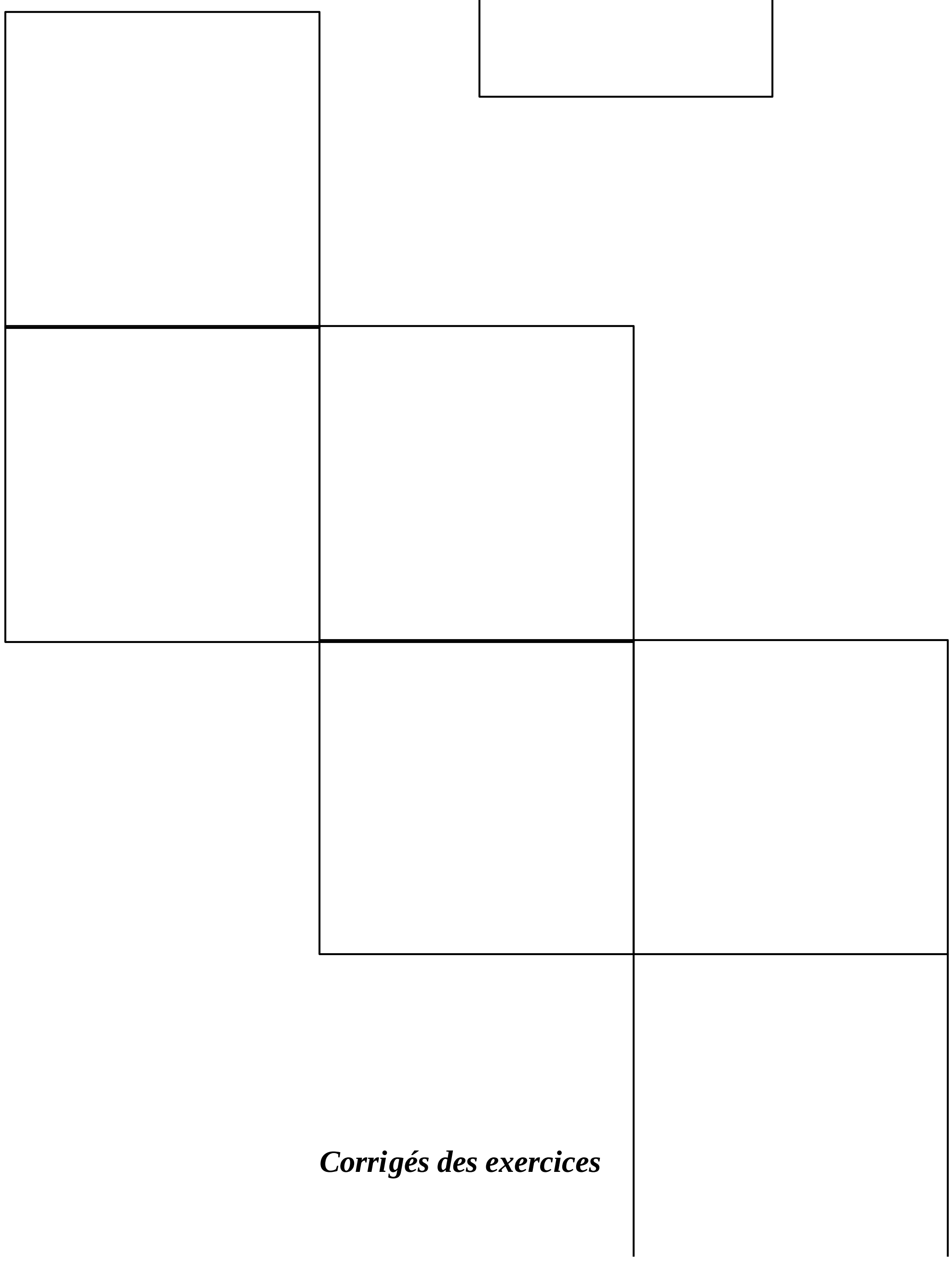
Ces deux patrons ne permettent pas de réaliser la construction de pavés car les dimensions ne correspondent pas lorsque l'on pliera.

Exercice 2



Exercice 3





4. AIRE D'UN SOLIDE

Exercice 1

Longueur totale des arêtes : 4 ´ (7,5 + 5,2 + 4,8) = 4 ´ 17,5 = 70 cm
Aire totale des faces : 2 ´ (7,5 ´ 5,2 + 7,5 ´ 4,8 + 5,2 ´ 4,8) = 199,92 cm^2

Exercice 2

Longueur totale des arêtes : 4 ´ (12 + 2,5 + 7) = 86 cm
Aire totale des faces : 2 ´ (12 ´ 2,5 +12 ´ 7 + 2,5 ´ 7) = 263 cm^2

Exercice 3

Les arêtes d'un cube ont pour longueur 8 cm.
Longueur totale des arêtes : 12 ´ 8 = 96 cm.
Aire totale des faces :6 ´ 8 ´ 8 = 384 cm^2

Avec des arêtes de 2,5 cm :
Longueur totale des arêtes : 12 ´ 2,5 = 30 cm.
Aire totale des faces :6 ´ 2,5 ´ 2,5 = 37,5 cm^2

Exercice 4

Longueur d'une arête : 60 : 12 = 5 cm.
Aire d'une face : 5 ´ 5 = 25 cm^2

Exercice 5

Une salle de séjour a la forme d'un pavé; ses dimensions sont 9,5 m de longueur et 6 m de largeur. La hauteur des murs est 2,40 m. On veut peindre trois des quatre murs. Donner un encadrement de la surface à peindre.
Un litre de peinture couvre 16 m^2*. Combien faut-il prévoir de pots de 3 litres pour être sur de pouvoir peindre les trois murs ?*

Les murs ont une aire de : 6 ´ 2,4 = 14,4 m^2 *et 9,5 ´ 2,4 = 22,8* m^2
La surface à peindre est donc comprise entre :
- *2 ´ 14,4 + 22,8 = 51,6* m^2
- *et 14,4 + 2 ´ 22,8 = 60* m^2

Avec un pot on couvre 3 ´ 16 = 48 m^2 *Il faudra donc deux pots .*

5. UNITÉS DE VOLUME

Exercice 1

$127\ cm^3 = 0{,}127\ dm^3$ $46\ m^3 = 46\ 000\ dm^3$ $0{,}25\ dm^3$
$6\ 200\ cm^3 = 6{,}2\ dm^3$
$580\ 000\ mm^3 = 0{,}58\ dm^3$
Donc $127\ cm^3 < 0{,}25\ dm^3 < 580\ 000\ mm^3 < 6\ 200\ cm^3 < 46\ m^3$

Exercice 2

$25\ dm^3 + 420\ cm^3 + 0{,}072\ m^3 = 25 + 0{,}42 + 72 = 97{,}42\ dm^3$
$568\ dm^3 - 7\ 500\ cm^3 = 568 - 7{,}5 = 560{,}5\ dm^3$

Exercice 3

430 cm^3 = 0,43 l   36 dm^3 = 36 l   52 000 mm^3 = 0,052 l

Exercice 4

3,75 hl = 375 l = 375 dm^3 540 dal = 5 400 l = 5 400 dm^3 3570 dl = 357 dm^3
480000 ml = 480 dm^3

Exercice 5

Compléter les égalités suivantes :18,4 l = 18,4 dm^3 82 cm^3 = 82 ml
800 hl = 80 m^3 70 cl = 0,7 dm^3 5 m^3 = 50 hl   280 cl = 2,8 dm^3

Exercice 6

3 l   400 cm^3 = 0,4 l   350 ml = 0,35 l   4,5 dl = 0,45 l
Donc 3 l > 4,5 dl > 400 cm^3 > 350 ml

Exercice 7

Volume du solide obtenu : 13,24 m^3 + 175,6 m^3 + 3 200 cm^3 = 13 240 + 175 600 + 3,2 = 188 843,2 dm^3

Exercice 8

Volume du solide restant : 153,1 dm^3 - 5 260 cm^3 = 153 100 - 5 260 = 147 840 cm^3

Exercice 9

Contenance de la citerne : 3 ´ (1,2 ´ 1,2 ´ 1,2) : 4 = 1,296 m^3 = 1 296 l
Nombre d'arrosoirs : 1 296 : 15 soit un peu plus de 86 arrosoirs.

Exercice 10

Contenance du bassin : 12 ´ 8 ´ 6 = 576 dm^3
Nombre de seaux : 576 : 12 = 48

6. CALCUL DU VOLUME DU PAVÉ

Exercice 1

Volume d'un cube dont l'arête a pour longueur 7 cm : 7 ´ 7 ´ 7 = 343 cm^3 .

Exercice 2

Contenance de la citerne 4 ´ (1,25 ´ 1,25 ´ 1,25) : 5 = 1,5625 m^3 .

Exercice 3

Volume d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont 8 cm , 7 cm , 9 cm :
8 ´ 7 ´ 9 = 504 m^3

Exercice 4

Volume de neige recouvrant la cour : 15 ´ 30 ´ 0,7 = 315 m^3

Exercice 5

Volume de cailloux : 150 ´ 4 ´ 0,08 = 48 m^3
Nombre de voitures : 48 : 0,8 = 60 voitures .

Exercice 6

Volume du réservoir : 1,2 ´ 1,4 ´ 0,75 = 1,26 m^3 = 1 260 litres.
Le temps nécessaire pour le remplir : 1 260 : 26 , soit environ 48 h 28 min

Exercice 7

Volume de la pièce : 10,45 ´ 6,7 ´ 3,1 = 217,0465 m^3 = 217 046,5 litres .
Temps nécessaire : 217 046,5 : 35 = 6 202 secondes environ, ce qui fait : 1h 43 min 22 s.

Exercice 8

Volume de pierres nécessaire : 15 ´ 9 ´ 0,2 = 27 m^3
Nombre de voyages : 27 : 4 soit 7 voyages , le dernier ne nécessitant que 3 m^3

Exercice 9

Aire de la base : 1,5 ´ 3,4 = 5,1 m^2
La hauteur mesure : 39,78 : 5,1 = 7,8 m.