

LA DIVISION EUCLIDIENNE

On veut ranger des œufs dans des boîtes par douzaines. Si on a 80 œufs à ranger, on peut dire qu'il faut 6 boîtes (72 œufs) et que 8 œufs ne seront pas rangés; ou bien on peut considérer qu'il faut 7 boîtes mais qu'il manquera 4 œufs pour que la septième boîte soit pleine. Mais quelle que soit la solution adoptée, on n'aura jamais réussi à ranger tous ces œufs dans un ensemble de boîtes pleines.

Le partage ne sera donc pas exact, et le nombre de boîtes ne peut être qu'une valeur approchée (il ne peut y avoir des morceaux de boîte).

Dans un cas de ce type, on parle de **division euclidienne**. C'est une opération qui ne fait intervenir **que des nombres entiers**.

$80 = 12 \times 6 + 8$ est l'écriture "en ligne" de la division euclidienne de 80 par 12.

80 est le dividende; 12 est le diviseur; 6 est le **quotient euclidien**; 8 est le reste.

Le reste est un nombre entier inférieur au diviseur. Par exemple, dans la division euclidienne par 6 le reste ne peut pas être plus grand que 5. Il y a donc **six** restes possibles : 0, 1, 2, 3, 4, et 5.

Toutefois lorsque le reste vaut 0 (il ne reste "plus rien" à diviser), la division n'est plus vraiment euclidienne, c'est une "vraie" division et le résultat n'est plus le quotient euclidien mais tout simplement le quotient. Mais il n'est peut-être pas indispensable de trop discuter sur ce point. Le cas où le reste est nul sera particulièrement étudié lors de la sixième semaine.

l'écriture en ligne

Pour calculer le quotient euclidien et le reste on pose la division comme à l'habitude; ce qui permet de donner ensuite l'écriture en ligne :

$$\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ 4 & 3 \end{array}$$
 L'écriture en ligne : $19 = 5 \times 3 + 4$. 3 est le quotient euclidien et 4 est le reste.

Lorsque le reste vaut 0, on écrit simplement : $54 = 9 \times 6$

Le problème de la division par 0.

Lorsque l'on parle d'un quotient, il faut que ce quotient existe, d'une part, et qu'il n'ait qu'une seule valeur possible, d'autre part.

Si l'on veut calculer le quotient d'un nombre par 0, on cherche un nombre q , dont le produit par 0 soit égal au dividende. Or tout produit par 0 est égal à 0. Donc deux cas se présentent :

Si le dividende est 0, tout nombre peut être quotient; il n'y a pas un quotient unique.

Pour toutes les autres valeurs du dividende, on ne pourra pas trouver de valeur pour q .

Donc, le quotient par 0 n'existe pas.

les mesures de durées.

Présentation du problème :

Les unités de temps et de durée ne respectent pas le système décimal utilisé habituellement pour les mesures (longueurs, masses, températures, etc.)

L'unité de base est la **seconde** (abréviation : s)

Les unités plus petites que la seconde respectent les habituelles divisions en dixièmes, centièmes, millièmes etc. Mais nous n'en parlerons pas ici.

60 secondes correspondent à une **minute**(abréviation : min.): $60s = 1 \text{ min.}$

60 minutes correspondent à une **heure**(abréviation : h.): $60 \text{ min.} = 1 \text{ h.}$

Au delà des heures, on peut compter en jours, en semaines en années...

Convertir dans une unité inférieure:

Pour transformer une durée dans une unité inférieure, il suffit de **multiplier** :

- ≈ Par 60 pour passer des heures aux minutes ou des minutes aux secondes.
- ≈ Par 3 600 (60 ? 60) pour passer directement des heures aux secondes.

Par exemple :

- ≈ $3h = 3 ? 60 = 180 \text{ min.}$
- ≈ $12 \text{ min.} = 12 ? 60 = 720 \text{ s.}$
- ≈ $4h 27 \text{ min.} = 4 ? 60 + 27 = 240 + 27 = 267 \text{ min.}$
- ≈ $1h 32 \text{ min.} = 3 600 + 32 ? 60 = 3 600 + 1 920 = 5 520 \text{ s.}$
- ≈ $5h 08 \text{ min.} 42 \text{ s} = 5 ? 3 600 + 8 ? 60 + 42 = 18 000 + 480 + 42 = 18 522 \text{ s.}$

Exercice : Transformer :

≈ En minutes :

- 24 h
- 12 h
- 6 h 15 min.
- 4 h 52 min.

≈ En secondes :

- 18 min.
- 54 min.
- 1h 23 min.
- 3h 26 min. 18s.
- 7 h 19 min. 45s.

Convertir dans une unité supérieure:

Pour transformer une durée dans une unité supérieure, il suffit de faire la **division euclidienne** :

Si la mesure initiale est exprimée en secondes.

En divisant par **3 600** : le quotient est le nombre **d'heures**. Et le reste est un nombre de secondes, que l'on cherche à convertir en minutes.

En divisant le reste par **60**, le quotient est un nombre de **minutes**, et le **reste** un nombre de **secondes**.

Par exemple : pour convertir 5 000 s :

$5 000 = 1 ? 3 600 + 1 400$. Dans 5 000 s, il y a 1 heure, et il reste 1 400 s.

$1 400 = 23 ? 60 + 20$. Dans 1 400 s, il y a 23 min. et il reste 20 s.

Donc, finalement : **5 000 s = 1 h 23 min. 20 s.**

Exercice : Convertir en h, min., s.

10 000 s 2 000 min. 100 s 100 min. 500 s 500 min.
200 min. 4 512 s. 38 450 s.

Opérations sur les durées :

Additions et multiplications:

On ajoute ensemble (ou on multiplie) les heures, puis les minutes, puis les secondes. Si le nombre de minutes ou de secondes est supérieur à 60, on les convertit dans l'unité supérieure comme il est montré plus haut.

Exemples :

2h 24 min. 36 s + 1h 12 min. 18 s = 3h 36 min. 54 s.

1h 45 min. + 2h 35 min. = 3h 80 min. = 3h + (1h 20 min.) = 4h 20 min.

3 ? (35 min. 40 s) = 105 min. 120 s = (1h 45 min.) + 2 min. = 1h 47 min.

Soustractions :

Si le nombre de minutes ou de secondes à soustraire est plus grand que le nombre auquel on le soustrait, il faudra convertir une unité supérieure pour que la situation s'inverse.

Exemples :

3h 30 min. - 1h 18 min. = 2h 12 min.

5h 20 min. - 2h 53 min. = (5 - 1)h + (20 + 60)min. - 2h 53 min. = 4h 80 min. - 2h 53 min.
= 2h 27 min.

Exercice : Calculer :

1h 47 min. 24 s + 5h 32 min. 56 s.

(39 min. 25s) ? 2

12h 53 min. 36 s + 7h 21 min. 34 s

1h 30 min. - 48 min.

2h 36 min. - 53 min. 40 s.

3 ? 6h 52 min. 16 s.

Exercices

Exercice 1

Trouver le quotient euclidien et le reste en posant les opérations.

Donner dans chaque cas l'écriture en ligne.

205 par 3

318 par 5

437 par 9

698 par 6

782 par 4

285 par 3

1 087 par 7

1 248 par 8

4 345 par 25

2 005 par 13

1 848 par 27

987 par 30

1 253 par 95

7 253 par 78

Exercice 2

Dans un collège, 143 élèves sont inscrits en classe de sixième.

1. Combien peut-on former d'équipes de basket à 5 joueurs? Combien d'élèves ne pourront pas être intégrés dans une équipe?
2. Combien peut-on former d'équipes de football à 11 joueurs? Combien d'élèves ne pourront pas être intégrés dans une équipe?
3. Combien peut-on former d'équipes de rugby à 15 joueurs? Combien d'élèves ne pourront pas être intégrés dans une équipe?

Exercice 3

1. *Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 7?*
2. *Quels sont les dividendes possibles dans la division euclidienne par 7 lorsque le quotient euclidien vaut 31?*
3. *Quels sont les dividendes possibles dans la division euclidienne par 7 lorsque le quotient euclidien vaut 43?*
4. *Quels sont les dividendes possibles dans la division euclidienne par 7 lorsque le quotient euclidien vaut 64?*

Exercice 4

1. *Dans une division euclidienne, le quotient euclidien est 13, le reste est 7 et le dividende est 202. Combien vaut le diviseur?*
2. *Dans une division euclidienne, le quotient euclidien est 18, le reste est 4 et le dividende est 238. Combien vaut le diviseur?*
3. *Dans une division euclidienne, le quotient euclidien est 4, le reste est 3 et le dividende est 203. Combien vaut le diviseur?*