∇ # $3^{ème}$ – DNB – 2001 – LYON

## PARTIE NUMERIQUE CORRIGE

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés, soit des étapes de calculs, soit d'explications. Le barème en tiendra compte

### Exercice 1

1. Calculer **A** et **B**, en donnant les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$$A = 9 \times \frac{3}{2} - 10 \qquad B = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$A = 9 \times \frac{3}{2} - 10 = \frac{27}{2} - \frac{20}{2} = \frac{7}{2}$$

$$B = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{5}{6} = \frac{27}{12} + \frac{10}{12} = \frac{37}{12}$$

2. On considère l'expression : $C = (2x - 5)^2 - (2x - 5)(3x - 7)$

a ) Développer et réduire **C**.

$C = 4x^2 - 20x + 25 - (6x^2 - 14x - 15x + 35)$

$C = 4x^2 - 20x + 25 - 6x^2 + 29x - 35$ $\qquad$ $C = -2x^2 + 9x - 10$

b ) Factoriser l'expression **C**.

$C = (2x - 5)[(2x - 5) - (3x - 7)]$

$C = (2x - 5)(2x - 5 - 3x + 7)$ $\qquad$ $C = (2x - 5)(2 - x)$

c) Résoudre l'équation : $(2x - 5)(2 - x) = 0$

$(2x - 5)(2 - x) = 0$

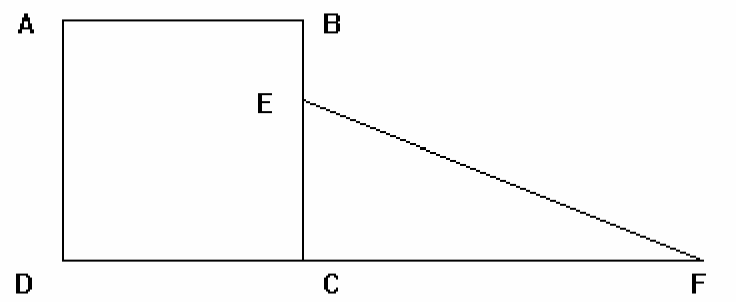
$2x - 5 = 0$ ou $2 - x = 0$

$x = \frac{5}{2}$ ou $x = 2$

**Exercice 2**

Sur la figure ci-contre ( qui n'est pas en vraie grandeur ),

**ABCD** est un carré dont le côté a pour mesure ( en centimètres ) **x**,
**ECF** est un triangle rectangle en **C**,
le point **E** étant un point du segment **[ BC ]**.
on donne **FC = 4 cm**.




1. a) Exprimer l'aire, notée $A_{ABCD}$, du carré **ABCD** en fonction de **x**.

$A_{ABCD} = x^2$ ( en $cm^2$ )

b) Calculer $A_{ABCD}$ pour $x = 2 + \sqrt{2}$ ( on donnera le résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où **a** et **b** sont des nombres entiers).

Pour $x = 2 + \sqrt{2}$ $A_{ABCD} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2$

$A_{ABCD} = 6 + 4\sqrt{2}$ ( en $cm^2$ )

2. On suppose que **x** est supérieur à **1**.

a) Sachant que la longueur **BE** est égale à **0, 5 cm**, calculer, en fonction de **x**, l'aire, du triangle **ACF** notée $A_{ECF}$ .

$EC = x - 0,5$

$A_{ECF} = \frac{1}{2}\, EC \times FC = \frac{1}{2}\,(x - 0,5) \times 4 = 2\,(x - 0,5)$

$A_{ECF} = 2x - 1$ ( en $cm^2$ )

a) On note **S** la somme, en fonction de **x**, des deux aires $A_{ABCD}$ et $A_{ECF}$.
Vérifier que : $S = x^2 + 2x - 1$

$S = A_{ABCD} + A_{ECF} = x^2 + 2x - 1$

3. Calculer **S** pour $x = 2 + \sqrt{2}$

On donnera le résultat sous la forme $c + d\sqrt{2}$, où **c** et **d** sont des nombres entiers).

Pour $x = 2 + \sqrt{2}$ $S = (2 + \sqrt{2})^2 + 2\,(2 + \sqrt{2}) - 1$

$S = 6 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} - 1$

$S = 9 + 6\sqrt{2}$ ( en $cm^2$ )

**Exercice 3**

Un cirque propose deux tarifs d'entrée : un pour les adultes et un pour les enfants.

Un groupe de trois enfants avec un adulte paie **290 F**.
On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues : $3x + y = 290$

Un autre groupe de **5** enfants avec quatre adultes paie **705 F**.

1. Ecrire alors une deuxième équation et résoudre le système obtenu de deux équations à deux inconnues.

   $5x + 4y = 705$

   On obtient le système d'équations à deux inconnues :

   $$\begin{cases} 3x + y = 290 \\ 5x + 4y = 705 \end{cases}$$

   En utilisant la méthode de substitution, on obtient :

   $$\begin{cases} y = 290 - 3x \\ 5x + 4(290 - 3x) = 705 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 290 - 3x \\ 5x + 1\,160 - 12x = 705 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} y = 290 - 3x \\ -7x = -455 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = 65 \\ y = 95 \end{cases}$$

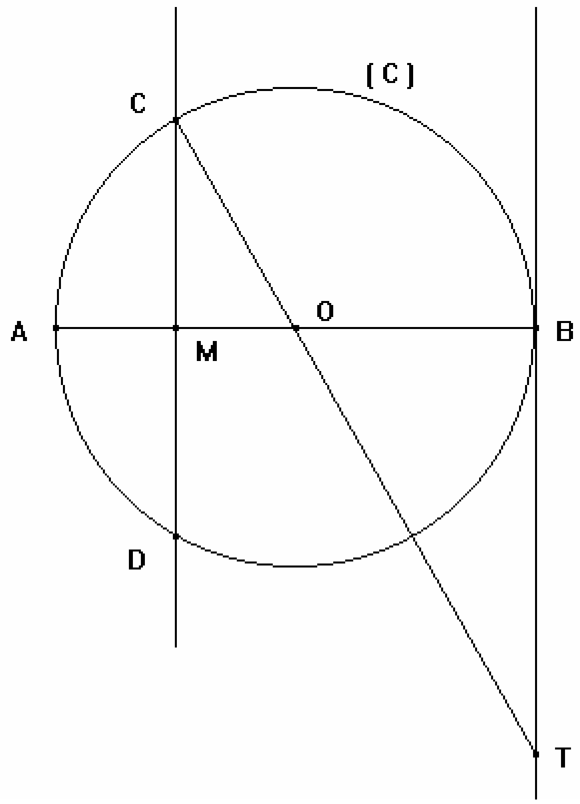
2. Donner le prix d'une entrée pour un enfant et celui d'une entrée pour une adulte

   Le prix d'une entrée pour un enfant est de **65 F** et celui d'une entrée pour un adulte de **95 F**.

## PARTIE GEOMETRIQUE    CORRIGE

### Exercice 1

La figure ci-contre n'est pas à refaire sur la copie. Elle n'est pas donnée en vraie grandeur.




Le rayon du cercle **( C )** de centre **O** est égal à **3 cm**. **[ AB ]** est un diamètre de ce cercle.
Les points **C** et **D** appartiennent au cercle et la droite **( CD )** est la médiatrice du rayon **[ OA ]**.
La droite **( OC )** coupe en **T** la tangente au cercle **( C )** au point **B**.

1) Montrer que **( CM )** et **( BT )** sont parallèles.

**( CD )** étant la médiatrice de **[ OA ]** , elle est perpendiculaire à **( AB )**.
**( BT )** étant la tangente à **( C )** en **B**, elle est aussi perpendiculaire à **( AB )**.
donc **( CM )** et **( BT )** sont parallèles.

2) Calculer, en utilisant la propriété de Thalès, la longueur **OT**.

La propriété de Thalès permet d'écrire : $\frac{OT}{OC} = \frac{OB}{OM}$

or : **OC = OB = 3** et **OM = 1, 5**

donc **OT = Erreur ! = 6**

3) a) Démontrer que le triangle **COA** est équilatéral.

**C** étant sur la médiatrice de **[ OA ]**, on a **CA = CO**.
De plus, **OC = OA**, car **[ OC ]** et **[ OA ]** sont deux rayons de **( C )**.
Donc **OC = OA = CA**, et le triangle **COA** est équilatéral.

b) En déduire une mesure ( en degrés ) de l'angle $\widehat{MCO}$

**[ CM )** est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ACO}$ et donc $\widehat{MCO} = 30\,°$.

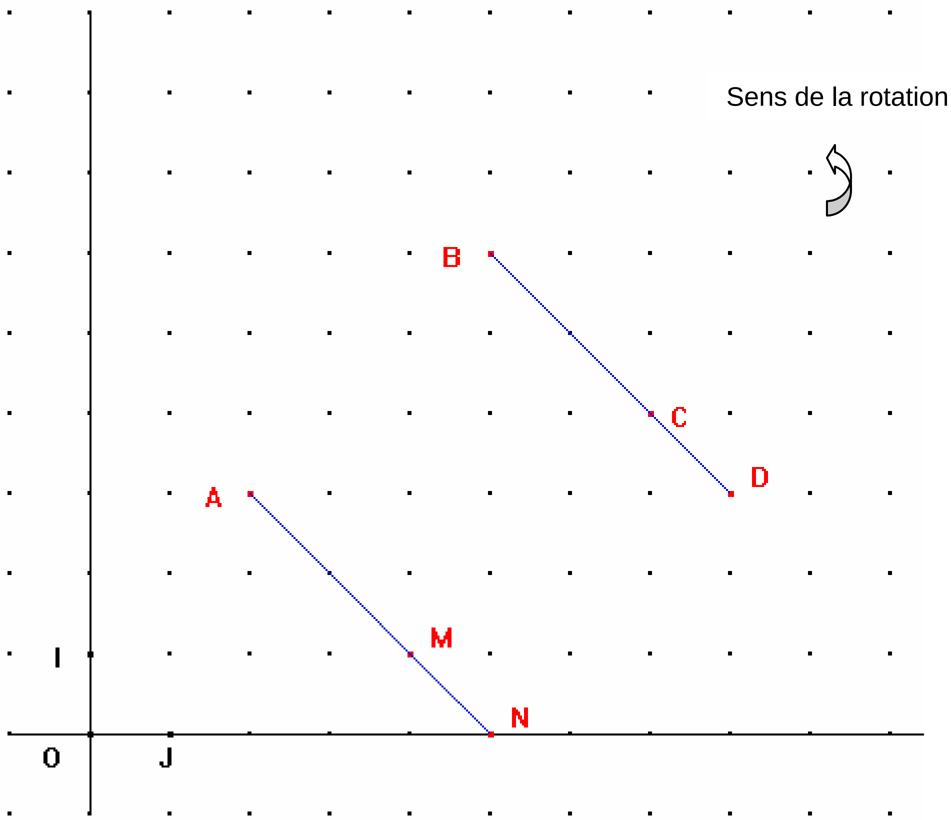
puis une mesure ( en degrés ) de l'angle $\widehat{DOT}$.

$\widehat{DOT}$ est un angle au centre et $\widehat{DCT}$ est un angle inscrit associé.

donc $\widehat{DOT} = 60\,°$.

## Exercice 2

Les tracés demandés dans cet exercice sont à réaliser sur la figure ci dessous.




1) Dans le repère orthonormé **( O, I, J )** représenté sur la feuille annexe n° 1, placer les points suivants :

**A ( 2 ; 3 ), B ( 5 ; 6 )** et **C ( 7 ; 4 )**.

voir figure ci-dessus.

2) On admettra que **$AB = 3\sqrt{2}$** et que **$BC = 2\sqrt{2}$**.
Calculer la distance **AC** et prouver que le triangle **ABC** est rectangle en **B**.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

On vérifie que : **$AB^2 + BC^2 = AC^2$**
d'après la réciproque de la propriété de Pythagore,
le triangle **ABC** est rectangle en **B.**

3) Représenter le point **D**, image du point **A** par la rotation de centre **B** et d'angle **90 °** ( dans le sens qui est indiqué sur la feuille annexe et qui est le sens contraire des aiguilles d'une montre ).

voir figure ci-dessus.

4) Représenter le point **M** tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
Quelle est la nature du quadrilatère **BCMA** ?

Puisque $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ , le quadrilatère **BCMA** est un parallélogramme.

De plus, il est rectangle en **B**.

C'est donc un rectangle.

5) a) Représenter le point **N** image de **D** dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ .

voir figure ci-dessus.

b) Expliquer pourquoi les points **B**, **C** et **D** sont alignés.

On a $\widehat{ABC} = 90\,°$ car le triangle **ABC** est rectangle en **B** et $\widehat{ABD} = 90\,°$
car **D** est l'image de **A** dans la rotation de centre **B** et d'angle **90 °**.

Les points **B**, **C** et **D** sont donc alignés :
ils se trouvent sur la perpendiculaire à **( AB )** issue du point **B**.

c) Démontrer que les points **A**, **M** et **N** sont alignés.

On a $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$ , car **BCMA** est un rectangle et $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{BA}$ par construction.

**A**, **M** et **N** sont donc les images respectives de **B**, **C** et **D** dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ .

La translation conservant l'alignement,

on en déduit que **A**, **M** et **N** sont alignés.

## PROBLEME

### PARTIE 1

Une entreprise fabrique des coquetiers en bois qu'elle vend ensuite à des artistes - peintres.
Elle leur propose, à deux tarifs, au choix :

- Tarif n° 1 : **25 F** le coquetier.
- Tarif n° 2 : un forfait de **400 F** et **15 F** le coquetier.

1) Calculer le prix de **30** coquetiers et celui de **50** coquetiers au tarif n° 1 puis au tarif n° 2.

Au tarif n° 1

**30** coquetiers valent : **30** $\times$ **25** = **750 F**

**50** coquetiers valent : **50** $\times$ **25** = **1 250 F**

Au tarif n° 2

**30** coquetiers valent : **400 + 30** $\times$ **15 = 850 F**

**50** coquetiers valent : **400 + 50** $\times$ **15 = 1 150 F**

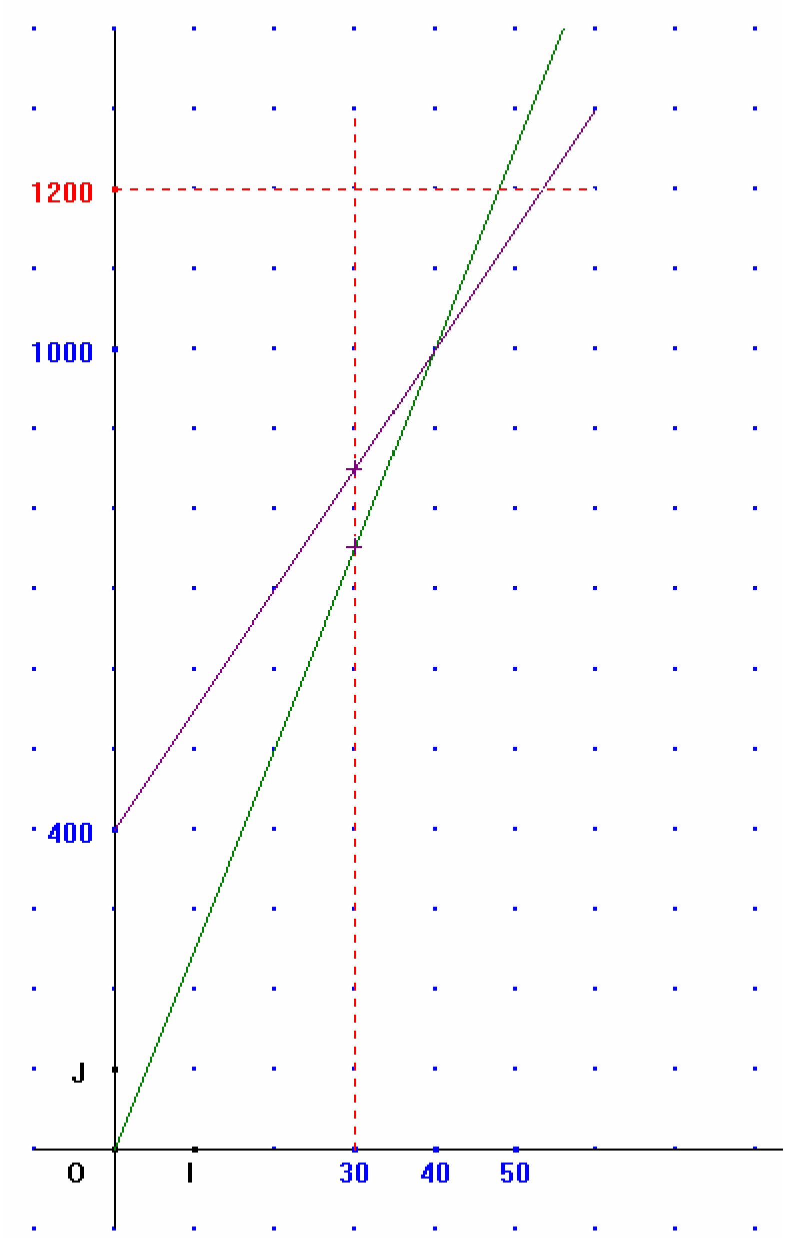
2) On note **x** le nombre de coquetiers commandés.

En fonction de **x**, les prix $P_1$ au tarif n° 1 et $P_2$ au tarif n° 2 de **x** coquetiers sont donc donnés par :

$$P_1(x) = 25x \quad \text{et} \quad P_2(x) = 15x + 400$$

Construire, dans le même repère orthogonal donné sur la figure ci-dessous, les droites $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ qui représentent les deux fonctions $P_1$ et $P_2$.

( on prendra comme unités :
sur l'axe des abscisses : **1 cm** pour **10** coquetiers commandés,
sur l'axe des ordonnées : **1 cm** pour **100 F** )




3) Par simple lecture graphique, répondre aux trois questions suivantes :

a) Quel est le plus grand nombre de coquetiers qu'un peintre peut acheter avec **1 200 F** ?

On lit graphiquement : **53**

b) Pour quel nombre de coquetiers, les prix $P_1$ et $P_2$ sont-ils les mêmes ?

On lit graphiquement : **40**

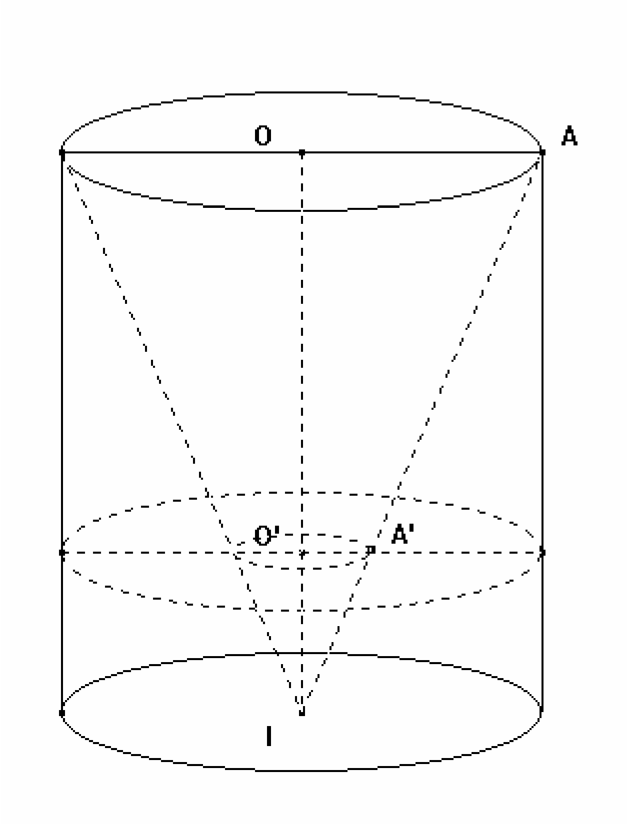
c) A quelle condition, le tarif n° 2 est-il le plus avantageux ?

si **x > 40**

**PARTIE 2**

**PARTIE 2**

Le coquetier est fabriqué avec un cylindre de **3 cm** de rayon et de **6 cm** de hauteur que l'on évide en creusant un cône de même base circulaire de centre **O** que le cylindre et dont le sommet est le centre **I** de l'autre base du cylindre.




1) Montrer que la valeur exacte du volume ( en $\mathbf{cm^3}$ ) d'un coquetier est $36\pi$ et donner sa valeur arrondie au $\mathbf{cm^3}$.

Volume du coquetier = volume du cylindre - volume du cône.

d'où $\mathbf{V = \pi \times 3^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6}$

$\mathbf{V = 54\pi - \frac{54}{3}\pi = 54\pi - 18\pi = 36\pi}$

Soit $\mathbf{V = 113\ cm^3}$ à $\mathbf{1\ cm^3}$ près.

2) On sectionne l'objet par un plan **( P )** parallèle à la base du cylindre.
Les points **O'** et **A'** appartiennent à ce plan **( P )**.

a) Sachant que la longueur **OO'** est **4 cm** et que les droites **( OA )** et **( O'A' )** sont parallèles, démonter que la longueur **O'A'** est égale à **1 cm**.

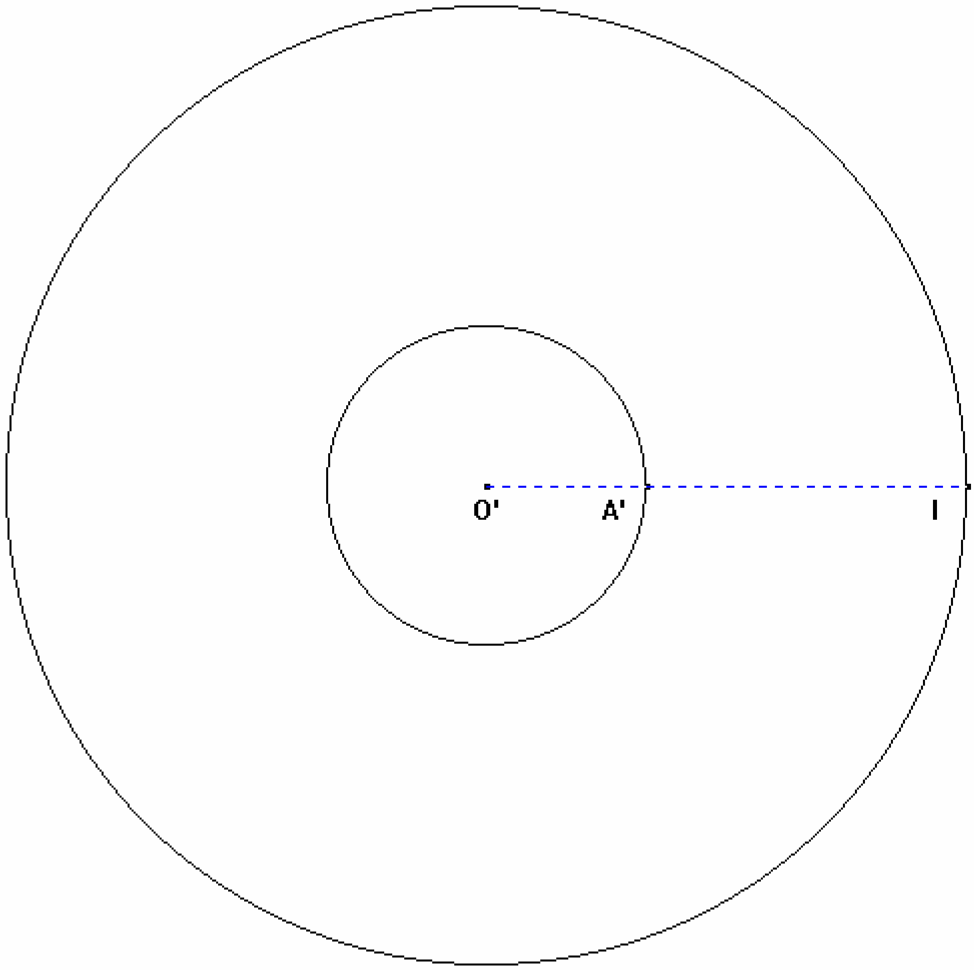
Dans le triangle **OAI**, les droites **( OA )** et **( O'A' )** sont parallèles donc d'après la propriété de Thalès on a :

$$\frac{O'I}{IO} = \frac{O'A'}{OA} \qquad \frac{2}{6} = \frac{O'A'}{3}$$

$$O'A' = \frac{6}{6} = 1 \qquad O'A' = 1 \text{ cm}$$

b) Dessiner la section du coquetier par le plan **( P )**.

( la figure, qui est une couronne, sera non déformée et dessinée en vraie grandeur ).




c) Calculer la valeur exacte de l'aire de cette section.

Aire de la section $= \pi \times 3^2 - \pi \times 1^2 = 9\pi - \pi = 8\pi$