Corrigé

Activités numériques : 12 points

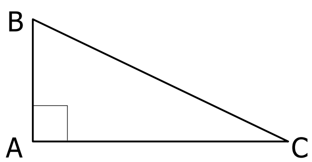
Exercice 1 :

1. $P = (x + 12)(x + 2)$
$P = x^2 + 2x + 12x + 24$
$P = x^2 + 14x + 24.$

2. $Q = (x + 7)^2 - 5^2$
$Q = [(x + 7) + 5]\,[(x + 7) - 5]$
$Q = (x + 12)(x + 2)$

Et on reconnaît la forme de P donc Q = P.

3.



ABC est un triangle rectangle en A. Le théorème de Pythagore donne :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$(x + 7)^2 = 5^2 + AC^2$$
$$(x + 7)^2 - 5^2 = AC^2 \text{ (on reconnaît Q)}$$

Q = AC^2 donc P = AC^2 et $\boxed{AC^2 = x^2 + 14x + 24}$.

Exercice 2 :

$$3(5 + 3x) - (x - 3) = 0$$
$$15 + 9x - x + 3 = 0$$
$$18 + 8x = 0$$
$$x = -\frac{18}{8}$$
$$x = -\frac{9}{4}$$

Cette équation admet une solution $\left(-\frac{9}{4}\right)$.

$3(5 + 3x)(x - 3) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$5 + 3x = 0$ ou bien $x - 3 = 0$

$x = -\frac{5}{3}$ ou bien $x = 3$

Cette équation admet deux solutions $-\frac{5}{3}$ et 3

Exercice 3 :

1. $4 \times 3 + 6 \times 4 = 12 + 24$
$= 36$

On compterait 36 sommets pour 4 triangles et 6 rectangles.

2. On peut appeler T le nombre de triangles et R le nombre de rectangles.

Les égalités $T + R = 18$ et $3 \times T + 4 \times R = 65$

donnent le système suivant : $\begin{cases} T + R = 18 \\ 3T + 4R = 65 \end{cases}$

$\begin{cases} T = 18 - R \\ 3(18 - R) + 4R = 65 \end{cases}$

$\begin{cases} T = 18 - R \\ 54 - 3R + 4R = 65 \end{cases}$

$\begin{cases} T = 18 - R \\ 1R = 65 - 54 \end{cases}$

$\begin{cases} T = 18 - R \\ R = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} T = 18 - 11 \\ R = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} T = 7 \\ R = 11 \end{cases}$

Vérifions que ces valeurs conviennent :
$T + R = 7 + 11 = 18$
$3T + 4R = 3 \times 7 + 4 \times 11 = 21 + 44 = 65$

Conclusion : Sur ce livre il y a 7 triangles et 11 rectangles.

Exercice 4 :

$A = (3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2}$
$A = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times 1 - 1 \times \sqrt{2} - 1 \times 1 - 2\sqrt{2}$
$A = 3 \times 2 + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}$
$A = 6 - 1$
$\boxed{A = 5}$

$B = 5\sqrt{27} + \sqrt{75}$
$B = 5 \times \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{25 \times 3}$
$B = 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$B = 5 \times 3 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3}$
$B = 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
$\boxed{B = 20\sqrt{3}}$

Activités géométriques : 12 points

Exercice 1 :

1. a. Voir la figure ci-dessous

b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (-5 ; 10)

c. $AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (5-(-5))^2}$
$AB = \sqrt{(-5)^2 + 10^2}$
$AB = \sqrt{125}$
$\mathbf{AB = 5\sqrt{5}}$ (en centimètre)

2. a. Voir la figure ci-dessous

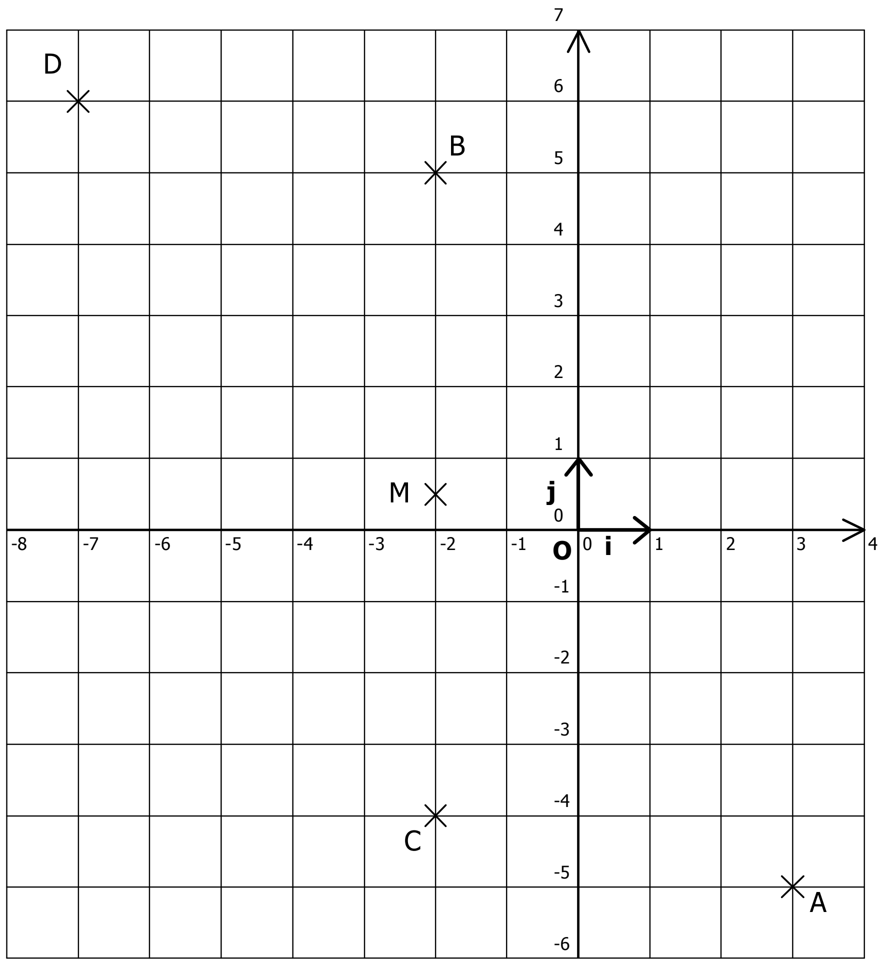
b. Le point D a pour coordonnées (-7 ; 6)

c. Puisque D est image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Les diagonales du parallélogramme ABDC se coupent en leur milieu M. Les coordonnées de M sont celles du milieu du segment [BC]

$x_M = \dfrac{-2 + (-2)}{2}$ et $y_M = \dfrac{5 + (-4)}{2}$

$x_M = -2$ et $y_M = 0,5$ Les coordonnées de M sont (-2 ; 0,5)



Exercice 2 :

(la boule a un rayon de 3,5 cm)

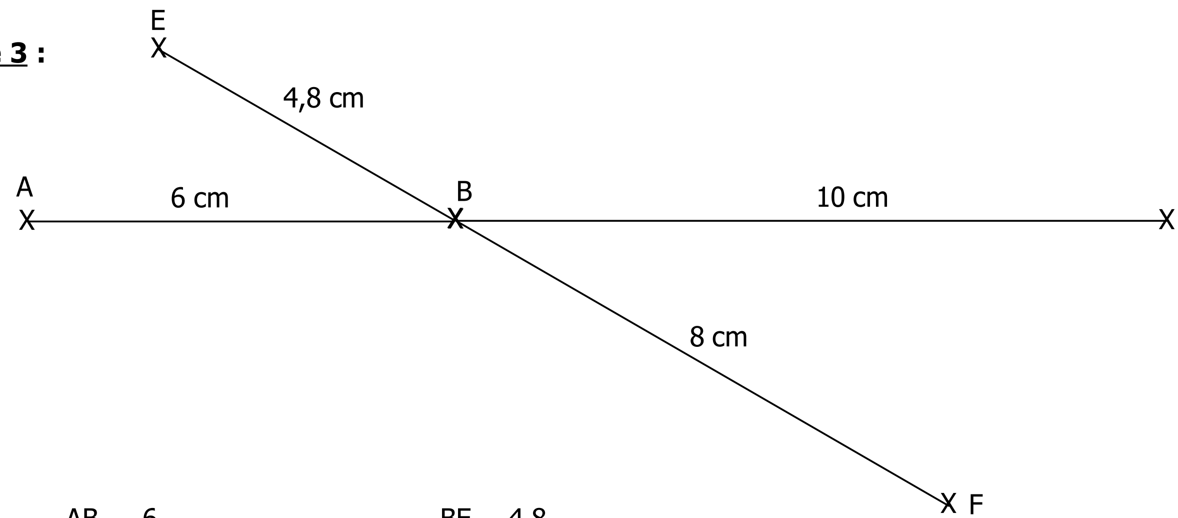
$V_{boîte} = 7^3\ cm^3 = 343\ cm^3$ $V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times 3,5^3\ cm^3$

Le taux de remplissage est : $T = \frac{V_{boule}}{V_{boîte}} \times 100 = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 3,5^3}{343} \times 100 = 52,35...$

Le taux de remplissage, arrondi à l'entier le plus proche, est 52 %.

Exercice 3 :

1.



2. D'une part $\frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$ et d'autre part $\frac{BE}{BF} = \frac{4,8}{8} = 0,6$

On a l'égalité $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BF}$ et les points A,B et C sont alignés dans le même ordre que E, B et F.

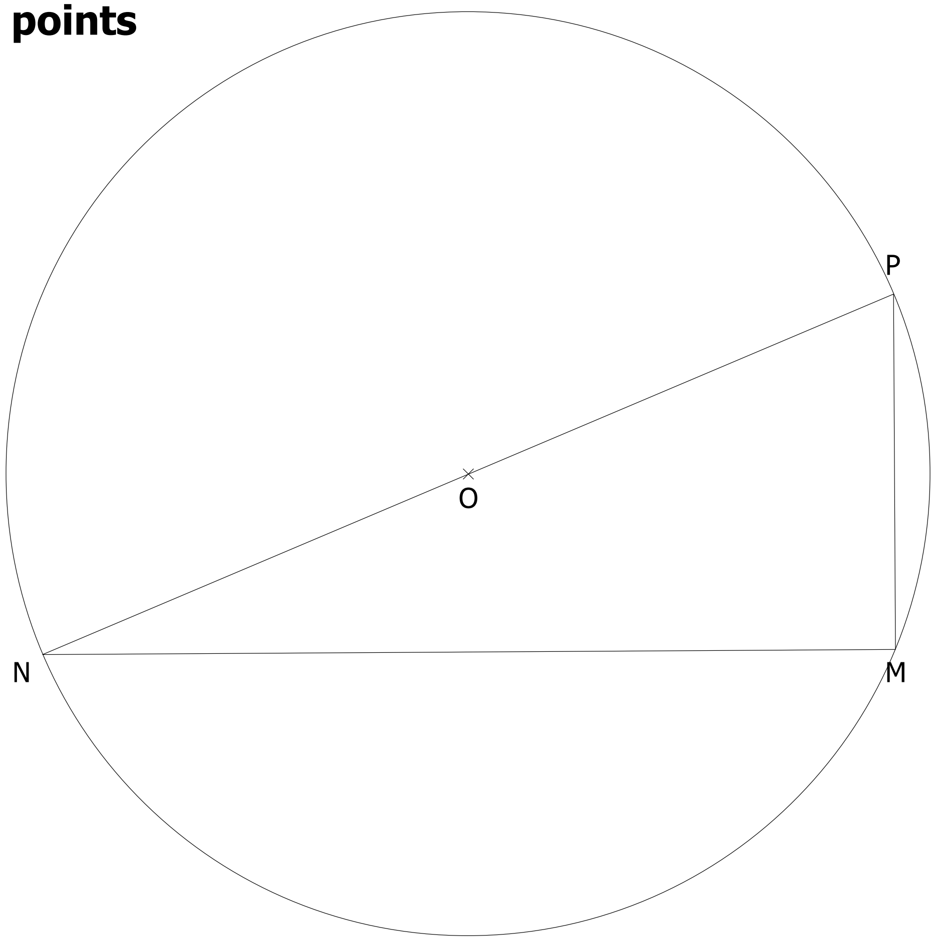
Alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès (AE) ;/ (CF).

3. Si les droites (AF) et (CE) étaient parallèles le quadrilatère AFCE serait un parallélogramme et ses diagonales [AC] et [EF] se croiseraient en leur milieu B.

Puisque AB = 6cm et BC = 10 cm ce n'est pas le cas, et on déduit que les droites (AF) et (CE) ne sont pas parallèles.

Problème : 12 points

Partie A



1. D'une part $PN^2 = 169$ et d'autre part $PM^2 + MN^2 = 25 + 144 = 169$. On a la relation $PN^2 = PM^2 + MN^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle MNP est rectangle en M.

2. Périmètre (MNP) = 5 + 12 + 13 = 30 cm et Aire (MNP) = $\frac{5 \times 12}{2}$ cm^2 = 30 cm^2.

3. Puisque MNP est rectangle en M son cercle circonscrit a son centre O situé au milieu de l'hypoténuse [NP] et son rayon vaut $\frac{13}{2}$ cm = 6 ,5 cm.

s

4. Tan $\widehat{PNM} = \frac{5}{12}$ donc $\widehat{PNM} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}619\,864\,95\ldots°$ soit $\widehat{PNM} = 22°$ (ou 23°) à 1° degré près.

Partie B

1. M, A et P sont alignés d'une part et M, B et N sont alignés d'autre part avec (AB) // (PN) ; d'après le théorème de Thalès on obtient : $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN} = \frac{AB}{PN}$ c'est-à-dire $\frac{x}{5} = \frac{MB}{12} = \frac{AB}{13}$.

On déduit MB = $\frac{12 \times x}{5} = \frac{12x}{5}$ et aussi AB = $\frac{13 \times x}{5} = \frac{13x}{5}$.

2. Périmètre$_{AMB}$ = AM + MB + AB = $x + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5}$

$= \frac{30x}{5}$

$= 6x$

3. L'équation $x + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5} = 18$

$\frac{30x}{5} = 18$ revient à 6x = 18 soit x = 3 ; cette équation a pour solution 3.

4. a. Voir nouvelle figure ci-dessous.

b. Aire $_{AMB} = 3 \times \frac{12}{5} \times 3$ cm^2 = 10,8 cm^2.

<u>Nouvelle figure ci-dessous</u> : ici x vaut 3.