(Poitiers 1995)

PARTIE NUMERIQUE

Exercice 1 : (4 points)

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1) On pose $A = (2x - 1)^2 - 3(5x - 4)$.

Développer et réduire A.

2) Soit $B = (3x - 1)^2 - 25$.

Factoriser B et calculer B pour $x = 2$.

3) Résoudre l'équation : $2x^2 = 18$.

4) Résoudre l'inéquation : $4x - 5(x + 3) \leq 0$.

Exercice 2 : (4 points)

Au moment de la rentrée, Pauline a payé 80 F pour l'achat de 4 cahiers et de 3 classeurs.

Dans le même magasin, Fabien a acheté 3 cahiers et 4 classeurs identiques à ceux de Pauline. Il a payé 84,50 F.

Après avoir traduit la situation sous la forme d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, calculer, dans ce magasin, le prix d'un cahier et celui d'un classeur.

Exercice 3 : (4 points)

On pose $A = \sqrt{48} + \sqrt{20}$ et $B = \sqrt{108} - \sqrt{45}$.

1) Montrer que :

- A s'écrit sous la forme $a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$
- et B s'écrit sous la forme $c\sqrt{3} + d\sqrt{5}$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs.

2) Montrer que le produit AB est un nombre entier.

PARTIE GEOMETRIQUE

Exercice 1 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

On donne : A(3 ; 6), B($-\frac{1}{2}$; 4) et C($\frac{7}{2}$; 2).

1) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x +$ **Erreur !** passe par B et C.

2) Montrer que les segments [DA] et [BC] ont même milieu.

3) Montrer que les droites (OA) et (BC) sont perpendiculaires.

4) Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ?

Exercice 2 : (6 points)

ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que AD = 3cm et AB = 2DC.

De plus, l'aire de ce trapèze est 27 cm^2.

1) Calculer, en centimètres, les longueurs DC et AB.

2) Démontrer que le périmètre du trapèze ABCD est égal à $\left(21+3\sqrt{5}\right)$ cm.

On rappelle que l'aire d'un trapèze de bases B et b, et de hauteur h est égale à : $\frac{B+b}{2} \times h$.

PROBLEME (12 points)

Soit ABCD un rectangle de centre O tel que le côté [AD] mesure 5 cm et la diagonale [BD] mesure 10 cm.

1) a) Construire en vraie grandeur ce rectangle en justifiant en quelques lignes votre construction.

b) Calculer la longueur AB et montrer que la valeur exacte de AB s'écrit sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier que l'on déterminera.

2) Soit I le milieu de [AB]. On trace le cercle ($\wp$) de centre O et de rayon OI qui coupe le segment [OB] en E et le segment [OD] en F.

a) Montrer que le triangle OCB est équilatéral.

b) Montrer que E est le milieu de [OB] et que la droite (CE) est tangente au cercle ($\wp$).

3) a) Montrer que la droite (AF) est parallèle à la droite (CE).

b) La droite (CE) coupe la droite (AB) en J et la droite (AF) coupe la droite (DC) en K.

Démontrer que $\frac{BJ}{BA} = \frac{1}{3}$.

c) En déduire, en utilisant la valeur exacte de AB trouvée en 1) b), la longueur BJ puis AJ.

4) a) Quelle est la nature du quadrilatère AKCJ ?

b) En déduire l'alignement des points K, O, J.

c) Quelle est, en cm^2, l'aire du quadrilatère AKCJ ?