Clermont 98

PARTIE NUMERIQUE

Les quatre exercices sont indépendants.
Les détails des calculs doivent figurer sur fa copie.

Exercice 1 :

Ecrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible, chacun des nombres suivants :

$A = 1 - \frac{5}{4} \times \frac{2}{15}$ $\qquad B = 6 - 4\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2$

Exercice 2 :

Calculer le nombre suivant et donner le résultat sous la forme $a \times 10^n$,a et n étant des nombres entiers relatifs :

$C = \dfrac{7 \times 10^{-12} \times 4 \times 10^5}{2 \times 10^{-4}}$

Donner ensuite l'écriture décimale de C.

Exercice 3 :

On considère l'expression D = $(2x + 3)^2 - (x - 4)^2$.

1. Développer et réduire D.
2. Ecrire D sous la forme d'un produit de deux facteurs.

3. Calculer D pour $x = \sqrt{3}$. (On donnera la valeur exacte du résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec à et b entiers.)

Exercice 4 :

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 2x + 3y = 25{,}5 \end{cases}$$

2. Pierre vient de commander 3 pains au chocolat et 2 croissants à la boulangerie. Pour cet achat, il a payé 27 francs. Soudain il se ravise et dit au boulanger :

- Excusez-moi, je me suis trompé, c'était le contraire. Pouvez-vous me donner un pain au chocolat de moins et un croissant de plus ?

- Bien sur, répond le boulanger.

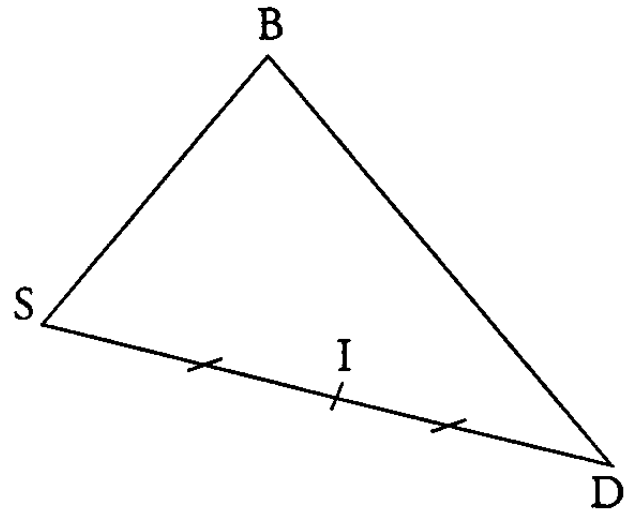
Il fait l'échange et rend 1,50 franc à Pierre.

Trouver, en justifiant la réponse, le prix d'un pain au chocolat et celui d'un croissant.

PARTIE GEOMETRIQUE

Exercice 1 :

Sur la figure ci-après, on a mis en place un triangle BDS ainsi que le



milieu I du segment [SD]. Les constructions demandées dans cet exercice seront faites sur cette figure.

l. a) Construire le point H, symétrique du point B par rapport à I.

b) Démontrer que $\vec{HD} = \vec{SB}$.

2. Construire le point R, image du point D dans la translation de vecteur $\vec{SB}$.

3. Démontrer que le point D est le milieu du segment [HR].

Exercice 2 :

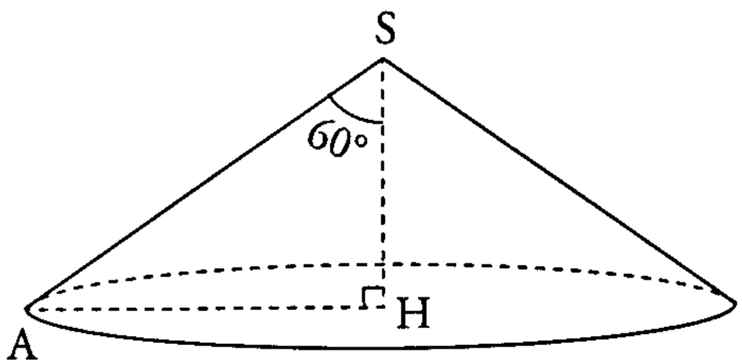
L'unité de longueur est le cm.

1. Tracer un segment [EF] tel que EF = 10, puis un demi-cercle de diamètre [EF]. Sur ce demi-cercle, placer le point G tel que EG = 9.

Sur le segment [EF], placer le point M tel que EM = 8.
Par M, tracer la droite (d) perpendiculaire à la droite (EG), les droites (d) et (EG) se coupent en P

2. Démontrer que les droites (FG) et (EG) sont perpendiculaires.
3. Démontrer que les droites (FG) et (MP) sont parallèles.
4. Calculer la longueur EP

Exercice 3 :



L'unité de longueur est le cm.

La figure ci-contre représente un cône de révolution de sommet S et de hauteur [SH]. On sait que la longueur de la génératrice de ce cône est SA = 6 et que l'angle $H\hat{S}A$ a pour mesure 60°.

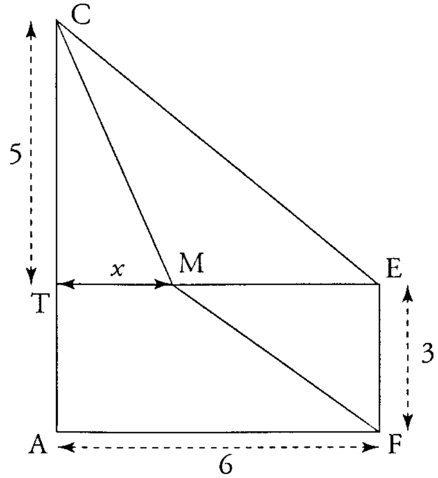
1. On rappelle que $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\tan 60° = \sqrt{3}$.
Calculer les valeurs exactes de la hauteur HS de ce cône et du rayon HA de son disque de base.
2. a) Calculer le volume du cône sous la forme $k \times \pi$, k étant un nombre entier.
b) Donner ensuite la valeur de ce volume arrondie au cm^3.

PROBLEME (12 points)

L'unité de longueur est le cm.
L'unité d'aire est le cm^2

Sur la figure ci-dessous, AFET est un rectangle et ETC un triangle rectangle en T.

On donne les longueurs TC = 5 ; ET = 6 et EF = 3.
Le point M peut se déplacer sur le segment [TE], et la longueur TM est désignée par x.



Première partie

Dans cette partie, on choisit $x = 2$.
1. Calculer la valeur exacte de la longueur CM, puis sa valeur arrondie au dixième.
2. Calculer la valeur exacte de la tangente de l'angle $T\hat{C}M$ et en déduire la mesure de l'angle $T\hat{O}M$ arrondie au degré.
3. Calculer l'aire A_1 du triangle TCM et l'aire A_2 du triangle MEF.

Deuxième partie

Dans cette partie, le point M peut se déplacer librement sur le segment [TE]
1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. Exprimer en fonction de x l'aire A_1 du triangle TCM.
3. a) Exprimer la longueur ME en fonction de x.

b) Exprimer en fonction de x l'aire A_2 du triangle MEF et l'écrire sous la forme ax + b, a et b étant deux nombres que l'on déterminera.
4. Pour quelles valeurs de x l'aire A_2 est-elle strictement supérieure à l'aire A_1 ?

Troisième partie

1. a) Tracer la droite D_1 d'équation $y = \frac{5}{2}x$.

b) Tracer la droite D_2 d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 9$

2. a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection S des droites D_1 et D_2.
b) En déduire, sans nouveau calcul, pour quelle valeur de x les triangles TCM et MEF de la deuxième partie ont la même aire. Quelle est alors la valeur commune de cette aire ?
3. Utiliser le graphique pour déterminer avec la meilleure précision possible les valeurs de x pour lesquelles l'aire A_2 du triangle MEF est supérieure ou égale à 3 (faire apparaître les tracés ayant permis de répondre).