Caen 99

PARTIE NUMERIQUE

Exercice 1 :

On considère les expressions numériques suivantes :

$A=\frac{4}{7}:\left(2-\frac{3}{5}\right)$ $B=\frac{9\times10^2}{21\times10^3}$

Calculer A et B (faire apparaître les différentes étapes de chaque calcul et donner les résultats sous la forme de fractions aussi simples que possible).

Correction :

$A=\frac{4}{7}:(\frac{2}{1}-\frac{3}{5})$

$A=\frac{4}{7}:(\frac{2\times5}{1\times5}-\frac{3}{5})$

$A=\frac{4}{7}:(\frac{10}{5}-\frac{3}{5})$

$A=\frac{4}{7}:\frac{10-3}{5}$

$A=\frac{4}{7}:\frac{7}{5}$

$A=\frac{4}{7}\times\frac{5}{7}$

$A=\frac{20}{49}$

$B=\frac{3\times3\times10^2}{7\times3\times10^2\times10}$

$B=\frac{3}{7\times10}$

$B=\frac{3}{70}$

Exercice 2 :

L'unité de longueur est le centimètre. On considère trois points A, M, B du plan, tels que AM = $4\sqrt{45}$, MB = $2\sqrt{20}$, AB = $16\sqrt{5}$.

1. Prouver que AM + MB = AB.
2. Que peut-on dire des points A, M, B ? Le justifier.

Correction :

1. $AM+MB = 4\sqrt{9\times5}+2\sqrt{4\times5}$

   $AM+MB = 4\sqrt{9}\times\sqrt{5}+2\sqrt{4}\times\sqrt{5}$

   $AM+MB = 4\times3\times\sqrt{5}+2\times2\times\sqrt{5}$

   $AM+MB = 12\sqrt{5}+4\sqrt{5}$

   $AM+MB = 16\sqrt{5}$.

Donc AM+MB = AB.

2. *Puisque AM+MB = AB, les points A,M et B sont alignés avec le point M appartenant au segment [AB].*

Exercice 3 :

Un objet coûte x francs; son prix augmente de 13%; l'objet coûte maintenant y francs.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Déterminer x sachant que y = 339.

Correction :

1. $y = x+\frac{13}{100}x$

   $y = \frac{100}{100}x+\frac{13}{100}x$

   $y = \frac{113}{100}x$.

2. *Avec y = 339 et en utilisant l'expression obtenue au 1.,*

   $\frac{113}{100}x = 339$

   $x = \frac{100}{113}\times339$

   $x = 100\times3$

donc x =300 si y = 339.

Exercice 4 :

Soit E = $(3x - 7)^2 - 16$.

1. Développer et réduire E.

2. Calculer E pour x = $\sqrt{3}$ (donner la valeur exacte sous la forme $a - b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers).

Correction :

1. $E = (3x)^2 - 2\times7\times3\times x + 7^2 - 16$
   $E = 3^2\times x^2 - 42\times x + 49 - 16$
   $E = 9x^2 - 42x + 33$
2. Avec x = $\sqrt{3}$:
   $E = 9\times\left(\sqrt{3}\right)^2 - 42\sqrt{3} + 33$
   $E = 9\times3 + 33 - 42\sqrt{3}$
   $E = 27 + 33 - 42\sqrt{3}$
   $E = 60 - 42\sqrt{3}$

Exercice 5 :

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = 23{,}5 \\ 7x + 4y = 79 \end{cases}$$

2. À une buvette, la consommation de trois cafés et d'une limonade coûte 23,50 F. La consommation de sept cafés et de quatre limonades coûte 79 F. Déterminer le prix d'un café et le prix d'une limonade.

Correction :

1. *Utilisons la méthode par addition (on pourra aussi utiliser la méthode par substitution) :*

$$\begin{cases} 3x + y = 23{,}5 \\ 7x - 12x + 4y - 4y = 79 - 4\times 23{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 23{,}5 \\ -5x = 79 - 94 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 23{,}5 \\ -5x = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 23{,}5 - 3x \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 23{,}5 - 3\times 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 23{,}5 - 9 \\ x = 3 \end{cases}$$

donc x = 3 et y = 14,5.

Vérification : on remplace x et y dans les deux équations initiales par 3 et 14,5 respectivement.

$3\times3 + 14{,}5 = 9 + 14{,}5 = 23{,}5$

$7\times3 + 4\times14{,}5 = 21 + 58 = 79.$

2. *On note x le prix d'un café et y le prix d'une limonade.*

D'après les données, on a :

$$\begin{cases} 3x + y = 23{,}5 \\ 7x + 4y = 79 \end{cases}$$

D'après 1., ce système a pour solution x = 3 et y = 14,5.

Donc un café coûte 3 francs et une limonade coûte 14,5 francs.

PARTIE GEOMETRIQUE

Exercice 1 :

1. Construire un triangle équilatéral ABC de côté 4 cm.

2. Construire le point M, image du point B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

3. Quelle est la nature du quadrilatère ABMC? Justifier.

4, a) Construire le point N tel que $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

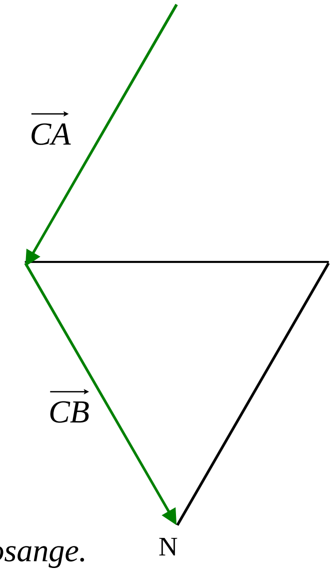
b) Montrer que le triangle ANB est équilatéral.

5. Le triangle ANB est l'image du triangle ABC par une rotation de centre A dans le sens des aiguilles d'une montre. Quel est l'angle de cette rotation ?

Correction :

1. *La construction se fait à la règle et au compas.*
2. *Construction ci-contre.*
3. *Par construction, le Quadrilatère ABMC est un Parallélogramme.*

De plus, puisque ABC est un triangle équilatéral, on a AB = AC.
Or, un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.
ABMC n'est pas un carré puisque on sait que l'un de ses angles mesure 60° ($\widehat{CAB}$).
Le quadrilatère ABMC est donc un losange.



4.a. Construction ci dessus.

b.

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB}.$$

De même, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CA}$.
On obtient AN = CB et BN = CA
D'où AN = BN =AB.
Le triangle ABN est donc un triangle équilatéral.

5. *B se transforme en N et C se transforme en B. Le centre de la rotation est le point A donc l'angle de la rotation est donné par l'angle $\widehat{NAB}$. Or le triangle ANB étant équilatéral, cet angle mesure 60°.*
   Donc l'angle de la rotation est de 60°.

Exercice 2 :
Un cône a pour base un disque de 6 cm de rayon et pour hauteur 15 cm.

1. Calculer son volume V en cm^3 (en donner la valeur exacte, exprimée en fonction de π).

2. On réalise une maquette du cône à l'échelle $\frac{2}{5}$.

Calculer le volume V' de cette maquette, arrondi au cm^3.

Correction :

1. $V = \frac{1}{3} Bh$ *où* $B = \pi r^2$ *avec* $r = 6$ *cm et* $h = 15$ *cm.*

Donc $V = \frac{1}{3}\pi 6^2 \times 15$

$V = \pi 36 \times 5$

$V = 180\pi \text{ cm}^3$.

2. *Dans cette maquette,* $h' = \frac{2}{5} h$ *et* $r' = \frac{2}{5} r$.

Ainsi, $h' = \frac{2}{5} \times 15 = 2 \times 3 = 6$

et $r' = \frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

$V' = \frac{1}{3}\pi 2{,}4^2 \times 6$

$V' = 5{,}76 \times 2 \times \pi$

$V' = 11{,}52\pi$

D'où $V' \approx 36 \text{ cm}^3$.

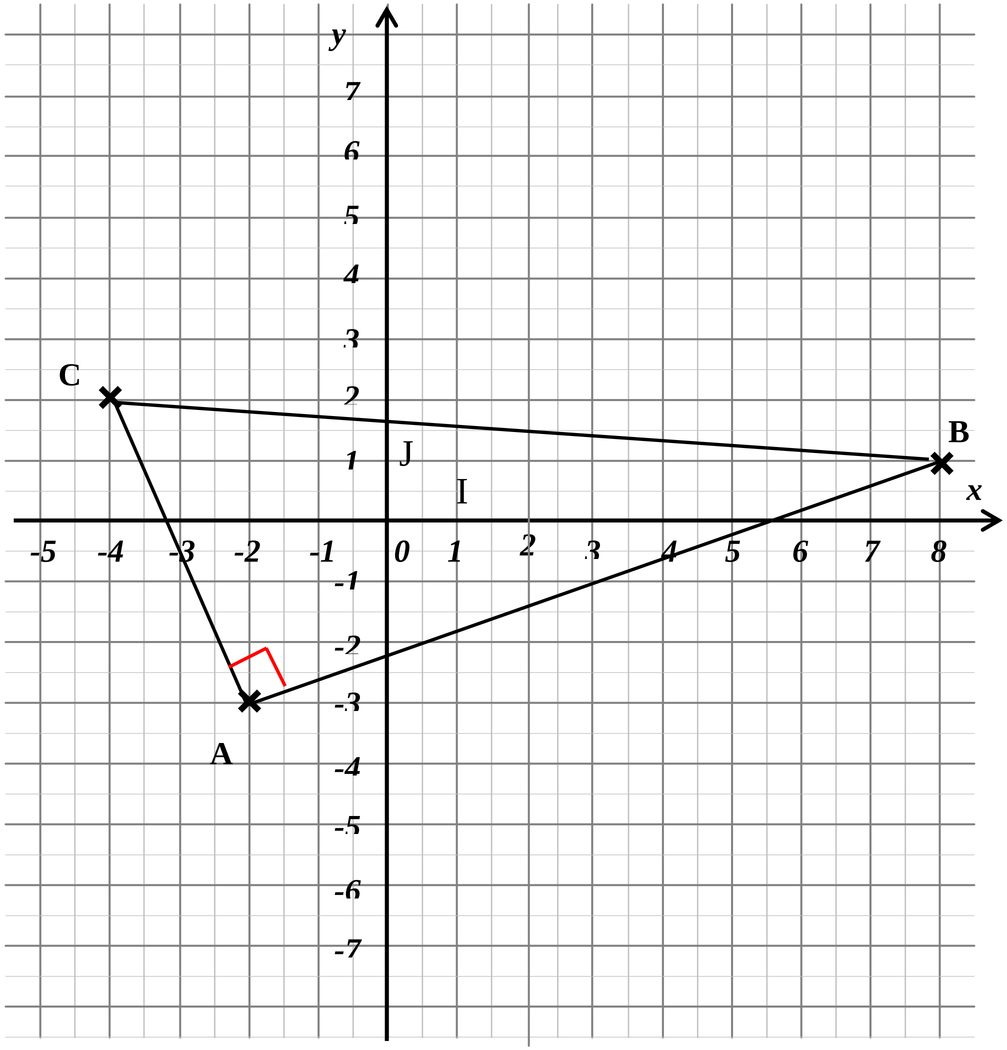
Exercice 3 :
Sur du papier millimétré, dessiner un repère orthonormal (0, I, J).
L'unité est le centimètre.
1. Placer les points A(- 2; -3) ; B(8; 1) ; C(- 4; 2).

2. Calculer AB, en donnant sa valeur exacte.

3. Sachant que AC = $\sqrt{29}$ et BC = $\sqrt{145}$, prouver que le triangle ABC est rectangle.

Correction :

1.



2. $AB = \sqrt{[8-(-2)]^2 + [1-(-3)]^2}$

$AB = \sqrt{(8+2)^2 + (1+3)^2}$

$AB = \sqrt{10^2 + 4^2}$

$AB = \sqrt{100+16}$

$AB = \sqrt{116}$

$AB = \sqrt{4 \times 29}$

$AB = \sqrt{4} \times \sqrt{29}$

$AB = 2\sqrt{29}$

3. On utilise le théorème réciproque de Pythagore :

$AC^2+AB^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{116}^2$

$AC^2+AB^2 = 29 + 116$

$AC^2+AB^2 = 145$

$AC^2+AB^2 = \sqrt{145}^2$.

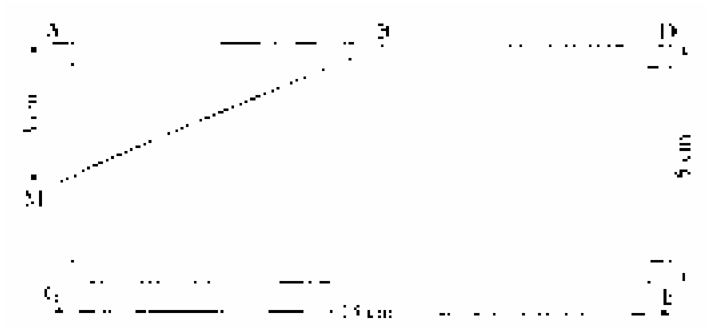
Donc $AC^2+AB^2 = BC^2$.

Ainsi le triangle ABC est rectangle en A (voir ci-contre) d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

PROBLEME (12 points)

L'unité de longueur est le cm ; l'unité d'aire est le cm^2.

Sur la figure ci-dessous, ADEG est un rectangle, B est un point du segment [AD] ; M est un point du segment [AG].



Première partie

On pose AB = 7.

1. Calculer BM. Donner la valeur exacte, puis donner une valeur approchée arrondie au dixième de cm.

2. Calculer tan $\widehat{ABM}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{ABM}$ en degrés, arrondie au degré.

Deuxième partie

On pose AB = x (0 < x < 13).

1. Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle ABM.

2. On considère l'aire y du polygone BDEGM. Montrer que :

$$y = 65 - \frac{3}{2}x$$

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'origine O. Sur une feuille de papier millimétré, marquer le point O en bas et à gauche de
la feuille. On choisit 1 cm pour l'unité sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 cm^2 sur l'axe des ordonnées.

Représenter graphiquement y en fonction de x pour 0 < x < 13.

4. a) Calculer x tel que y = 53.

b) Retrouver cette valeur de x sur le graphique (on utilisera des pointillés).

5. Dans cette question, les droites (MB) et (DG) sont parallèles.

Déterminer la valeur de x qui correspond à cette situation.

Correction :

Première partie : AB = 7

1. *Le triangle ABM est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :*

$BM^2 = MA^2+AB^2$

$BM^2 = 3^2+7^2$

$BM^2 = 9+49$

$BM^2 = 58$

Donc $BM = \sqrt{58}$

et $BM \approx 7{,}6$ *cm.*

2. $\tan\left(A\hat{B}M\right) = \dfrac{AM}{AB}$

donc $\tan\left(A\hat{B}M\right) = \dfrac{3}{7}$ *et* $A\hat{B}M \approx 23°$ *(calculatrice).*

Deuxième partie : AB = x (0 < x < 13)

1. *Le triangle ABM étant rectangle en A :*

$\text{Aire } (ABM) = \dfrac{AB \times AM}{2}$

$\text{Aire } (ABM) = \dfrac{x \times 3}{2}$

$\text{Aire } (ABM) = \dfrac{3}{2}x$.

2. $y = \text{Aire } (BDEGM) = \text{Aire } (ADEG) - \text{Aire } (ABM)$

avec $\text{Aire } (ADEG) = AD \times AG$

$\text{Aire } (ADEG) = 13 \times 5$

$\text{Aire } (ADEG) = 65$

et $\text{Aire } (ABM) = \dfrac{3}{2}x$.

Donc $y = 65 - \dfrac{3}{2}x$.

3. *La représentation graphique de y est une droite : il suffit de déterminer les coordonnées de deux points distincts pour la tracer.*

Si $x = 0$, $y = 65$.

Si $x = 10$, $y = 65 - \dfrac{3 \times 10}{2}$

$y = 65 - \dfrac{30}{2}$

$y = 65 - 15$

$y = 50$.

Les deux points de coordonnées (0 ; 65) et (10 ; 50) sont sur la droite recherchée.

Puisque y est définie pour x compris entre 0 et 13, on limite le tracé à un segment d'extrémités ayant pour abscisse 0 et 13.

c. *A, B, D et A, M, G sont alignés dans cet ordre et les droites (MB) et (DG) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalés, on a :* $\dfrac{AB}{AB} = \dfrac{AM}{AG}$

Avec AB = x, $\dfrac{x}{13} = \dfrac{3}{5}$

$$x = \frac{3}{5} \times 13$$

$$x = \frac{39}{5}$$

donc x = 7,8 si les droites (MB) et (DG) sont parallèles.

8

4. *a.* *Si* $y = 53$,

$65 - \dfrac{3}{2}x = 53$

$-\dfrac{3}{2}x = 53 - 65$

$-\dfrac{3}{2}x = -12$

$\dfrac{3}{2}x = 12$

$x = \dfrac{2}{3}12$

$x = 2 \times 4$

$x = 8.$

Vérification : $65 - \dfrac{3}{2} \times 8 = 65 - 3 \times 4 = 65 - 12 = 53.$

b. Sur la représentation graphique de y, on recherche l'abscisse du point ayant pour ordonnée 53 : voir ci-dessus.