Limoges 99

PARTIE NUMERIQUE

Exercice 1 :

Écrire le plus simplement possible :

A=$\frac{5}{7}-\frac{14}{25}\times\frac{15}{49}$ B=$(-2)^5-3^4$ C=$\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{2-\frac{7}{3}}$

Exercice 1 :

$$A=\frac{5}{7}-\frac{14}{25}\times\frac{15}{49}$$
$$=\frac{5}{7}-\frac{2\times7\times3\times5}{5\times5\times7\times7}$$
$$=\frac{5}{7}-\frac{6}{35}$$
$$=\frac{5\times5}{7\times5}-\frac{6}{35}$$
$$=\frac{25-6}{35}$$
$$=\frac{19}{5}$$

$$B=(-2)^5-3^4=-32-81=-113$$

$$C=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{2-\frac{7}{3}}=\dfrac{\frac{3\times3}{4\times3}+\frac{1\times4}{3\times4}}{\frac{2\times3}{1\times3}-\frac{7}{3}}$$
$$=\dfrac{\frac{9+4}{12}}{\frac{6-7}{3}}=\dfrac{\frac{13}{12}}{\frac{-1}{3}}$$
$$=-\frac{13}{12}\times\frac{3}{1}=-\frac{13\times3}{3\times4}$$
$$=-\frac{13}{4}$$

Exercice 2 :

1. Écrire sous la forme a$\sqrt{b}$, b entier le plus petit possible, les nombres $\sqrt{18}$ et $\sqrt{12}$
2. Développer et simplifier $(10+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.
3. Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité?

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$10+4\sqrt{6}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	2

Exercice 2 :

1) $\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

2)

$$(10+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=10\times\sqrt{3}-10\times\sqrt{2}+4\sqrt{6}\times\sqrt{3}-4\sqrt{6}\times\sqrt{2}$$
$$=10\sqrt{3}-10\sqrt{2}+4\sqrt{18}-4\sqrt{12}$$
$$=10\sqrt{3}-10\sqrt{2}+4\times3\sqrt{2}-4\times2\sqrt{3}$$
$$=10\sqrt{3}-8\sqrt{3}-10\sqrt{2}+12\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

3) Oui, c'est un tableau de proportionnalité, car les produits en croix sont égaux.

$$(10+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$

$2\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

Exercice 3 :
1. On considère l'expression :
$D = (3x - 1)^2 - (x - 1)(9x + 6)$
a) Développer et réduire D.
b) Résoudre l'inéquation : $-3x + 7 \geq 1$.
2. On considère l'expression : $E = (3x - 2)^2 - 9$,
a) Factoriser E.
b) Résoudre l'équation : $(3x - 5)(3x + 1) = 0$.

Exercice 3 :
a)
$D = (3x - 1)^2 - (x - 1)(9x + 6)$
$D = [(3x)^2 + 1^2 - 2\times3x] - [x\times9x + x\times6 - 1\times9x - 1\times6]$
$D = [9x^2 + 1 - 6x] - [9x^2 + 6x - 9x - 6]$
$D = -9x^2 + 1 - 6x - 9x^2 - 6x + 9x + 6$
$D = -3x + 7$

b) $-3x + 7 \geq 1$
$-3x + 7 - 7 \geq 1 - 7$
$-3x \geq -6$
$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-6}{-3}$ *(on divise par un négatif, donc on change le sens)*
$x \leq 2$ *(on vérifie que 0 est bien solution, car* $-3\times0 + 7 \geq 1$*)*

2) a)
$E = (3x - 2)^2 - 9$
$= (3x - 2)^2 - 3^2 = [(3x - 2) + 3][(3x - 2) - 3]$
$= [3x - 2 + 3][3x - 2 - 3]$
$= (3x + 1)(3x - 5)$

b) $(3x - 5)(3x + 1) = 0$
Un produit de plusieurs facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :
$3x - 5 = 0$
$3x - 5 + 5 = 0 + 5$
$\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$
$x = \frac{5}{3}$
ou
$3x + 1 = 0$
$3x + 1 - 1 = 0 - 1$
$\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$
$x = -\frac{1}{3}$

Exercice 4 :
1. Résoudre le système d'équations :
$$\begin{cases} 5x + 3y = 180 \\ x + y = 40 \end{cases}$$
2. Simon a quarante livres, les uns ont une épaisseur de 5 cm, les autres une épaisseur de 3 cm. S'il les range sur un même rayon, ils occupent 1,80 m.
Combien Simon a-t-il de livres de chaque catégorie?

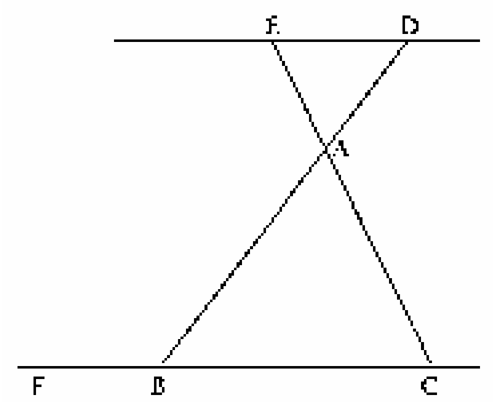
Exercice 4 :
1) On procède par substitution :
$$\begin{cases} 5x + 3y = 180 \\ x + y = 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(40 - y) + 3y = 180 \\ x = 40 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} 200 - 5y + 3y = 180 \\ x = 40 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} 200 - 2y = 180 \\ x = 40 - y \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2y = 180 - 200 = -20 \\ x = 40 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 10 \\ x = 40 - 10 = 30 \end{cases}$$
Vérification :
$5\times30 + 3\times10 = 150 + 30 = 180$
$30 + 10 = 40$

2)Soit x le nombre de livres d'épaisseur 5 cm et y le nombre de livres d'épaisseur 3 cm.
On obtient le système précédent.
D'où x=30 et y=10
Il y a donc 30 livres de 5cm d'épaisseur et 10 livres de 3cm d'épaisseur.

PARTIE GEOMETRIQUE

Exercice 1 :

La figure ci-dessous est donnée à titre d'exemple pour préciser le disposition des points, segments et droites. Elle n'est pas conforme aux mesures données.



L'unité de longueur est le centimètre.

On donne :
AB = 7,5 BC = 9 AC = 6 AE = 4 BF = 6
Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
1. Calculer AD.
2. Les droites (EF) et (AB) sont-elles parallèles ?
Calculer EF.

Correction ;

1) *Les triangles AED et ABC sont tels que E, A et C sont alignés ainsi que D,A et B ; et les droites (BC) et (ED) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a donc :*

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \text{ soit } \frac{4}{6} = \frac{AD}{7{,}5}$$

d'où $6 \times AD = 4 \times 7{,}5$ *et* $AD = \dfrac{4 \times 7{,}5}{6} = 5$

2) *Les points C,A,E et C,B,F sont alignés dans cet ordre et de plus :*

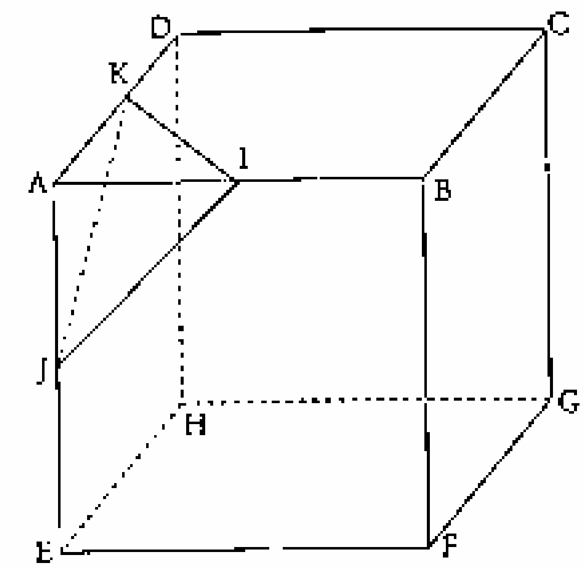
$$\frac{CA}{CE} = \frac{6}{6+4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{CB}{CF} = \frac{9}{9+6} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Donc $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CF}$ *et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.*

Exercice 2 :

ABCDEFGH est un cube d'arête [AB] avec AB = 12 cm.



I est le milieu du segment [AB].
J est le milieu du segment [AE].
K est le milieu du segment [AD].
1. Calculer l'aire du triangle AKI.
2. Quel est le volume de la pyramide JAIK, de base AIK?
3. Quelle fraction du volume du cube représente le volume de la pyramide JAIK? Ecrire le résultat sous forme d'une fraction de numérateur 1.

Correction :

1. Le triangle AKI est rectangle en A. De plus AK=AI=12 :2=6
Aire (AKI)=(AK×AI) :2=36 :2=18 cm^2

2.

$$V(JAIK) = \frac{B \times h}{3}$$
$$= \frac{18 \times 6}{3}$$
$$= 36cm^3$$

3.

$$\frac{V(JAIK)}{V(ABCDEFGH)} = \frac{36}{12^3}$$
$$= \frac{3 \times 12}{3 \times 4 \times 12 \times 12} = \frac{1}{48}$$

PROBLEME (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.

On appelle A et B les points dont les coordonnées sont :

A(- 1 ; 3) et B(- 3 ; - 1)

1. Placer les points A et B dans le repère.

2. Soit (D) la droite d'équation y = 2x + 5.

a) Montrer que les points A et B appartiennent à la droite (D).

b) Tracer la droite (D).

3. On appelle M le milieu du segment [AB].

a) Calculer les coordonnées du point M.

b) Déterminer une équation de la droite (OM).

c) Montrer que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires.

4. Soit C le symétrique du point O par rapport au point M.

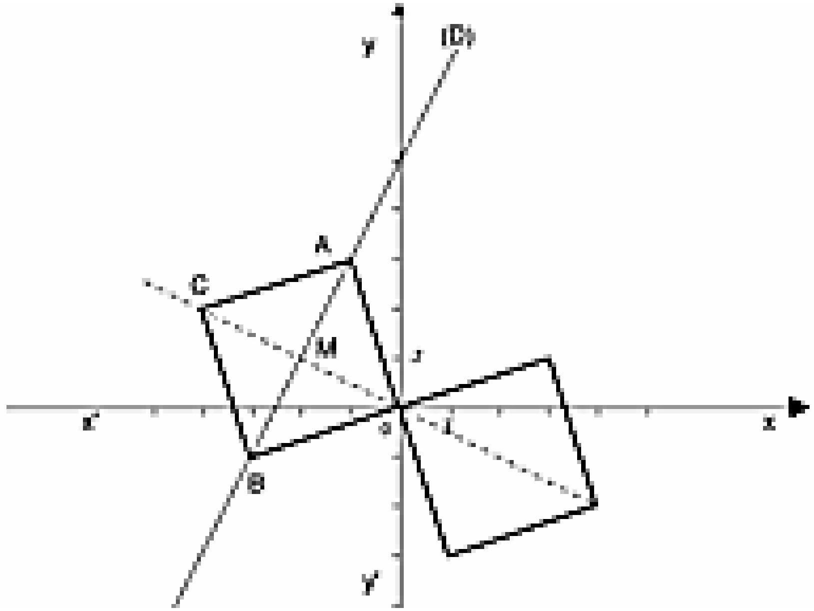
a) Montrer, par le calcul, que les coordonnées de C sont (-4 ; 2).

b) Calculer les distances OC et AB.

c) En déduire la nature du quadrilatère AOBC. Justifier la réponse.

5. Construire l'image du quadrilatère AOBC par la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$.

Correction :



2. $2x_A + 5 = 2\times(-1) + 5 = -2 + 5 = 3 = y_A$ donc A∈(D)

$2x_B + 5 = 2\times(-3) + 5 = -6 + 5 = -1 = y_B$ donc B∈(D)

3. a)

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

donc M(-2 ;1)

b)La droite (OM)passe par l'origine du repère, elle a donc une équation de la forme y=ax.

M∈(OM) d'où $y_M = ax_M$ soit $1 = a\times(-2)$

Donc a=-0,5 et l'équation de (OM) est y=-0,5x

c) (AB)=(D) donc (AB) a pour coefficient directeur 2.

2 × (-0,5)=-1 (dans un repère orthonormal) donc (AB) et (OM) sont perpendiculaires.

4).a)

C est le symétrique du point O par rapport au point M donc $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} x_C - x_M = -2 \\ y_C - y_M = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = -2 + (-2) = -4 \\ y_C = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

donc C(-4 ; 2)

b)

$$OC = \sqrt{\left(x_C - x_O\right)^2 + \left(y_C - y_O\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-4\right)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{20}$$

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-2\right)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{20}$$

c) Le quadrilatère AOBC a ses diagonales perpendicualires de même longueur et qui se coupent en leur milieu M, c’est donc un carré.