Poitiers 99

PARTIE NUMERIQUE

Exercice 1 :

$$A=\frac{12}{15}-\frac{8}{15}\div\frac{16}{9}=\frac{12}{15}-\frac{8}{15}\times\frac{9}{16}=\frac{12}{15}-\frac{8\times 9}{15\times 16}=\frac{12}{15}-\frac{8\times 9}{15\times 8\times 2}=\frac{12}{15}-\frac{9}{30}=\frac{24}{30}-\frac{9}{30}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

$$B=(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)=(3\sqrt{2})^2-4^2=3^2\times(\sqrt{2})^2-16=9\times 2-16=18-16=2$$

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit vaut 1.

$A\times B=\frac{1}{2}\times 2=1$ donc A et B sont bien inverses l'un de l'autre.

Exercice 2 :

1. ABCD est un carré si, et seulement si, AD =DC

$$\begin{aligned} AF+FD&=DG+GC\\ 2x+6&=8+x\\ 2x-x+6&=8\\ x+6&=8\\ x&=8-6\\ x&=2 \end{aligned}$$

Finalement, ABCD est un carré pour x = 2.

2. Soit A_1 l'aire du rectangle DFIG et A_2 l'aire du rectangle IEBH (en cm²).

$A_1=DF\times DG=6\times 8=48$

$A_2=EI\times IH=2x\times x=2x^2$

Dire que les rectangles DFIG et IEBH ont la même aire revient à écrire l'égalité : $A_1 = A_2$. Autrement dit :

$48=2x^2$

$x^2=\frac{48}{2}$

$x^2=24$

$x=\sqrt{24}$

Donc les rectangles DFIG et IEBH ont la même aire pour $x=\sqrt{24}$.

Exercice 3 :

1. Le parc P_1 compte 125 places disponibles sur 500 au total, donc 375 places occupées sur 500.

$$\frac{375}{500}=\frac{5\times 75}{5\times 100}=\frac{75}{100}=75\%$$

Le parc P_1 a donc bien un taux d'occupation de 75 %.

2. Taux d'occupation du parc P_2 :

$$\frac{850-136}{850}=\frac{714}{850}=\frac{17\times 42}{17\times 50}=\frac{42}{50}=\frac{84}{100}=84\%$$

Taux d'occupation du parc P_3 :

$$\frac{340-102}{340}=\frac{238}{340}=\frac{34\times 7}{34\times 10}=\frac{7}{10}=\frac{70}{100}$$

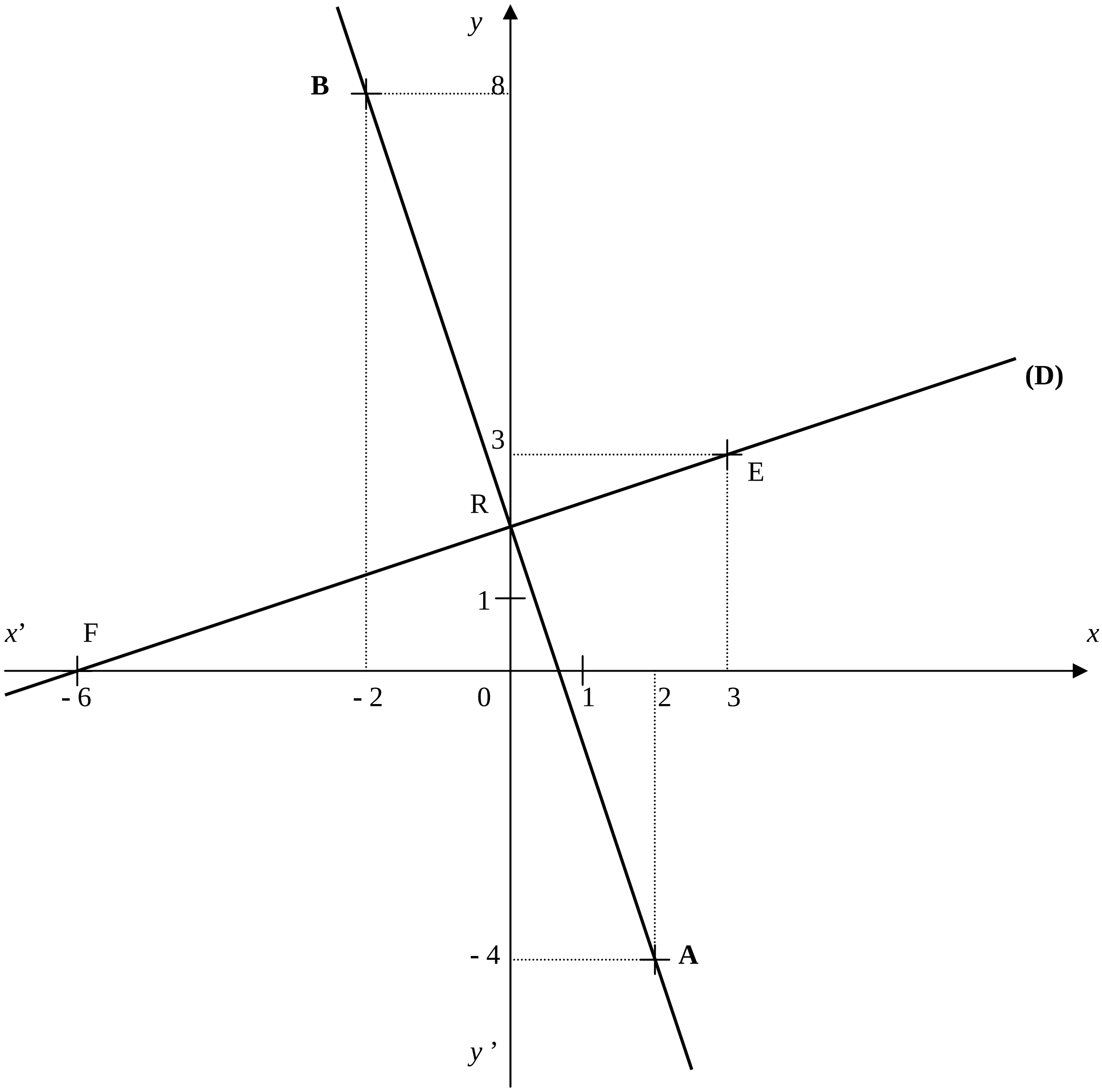
Taux d'occupation du parc P_4 :

$$\frac{310-124}{310}=\frac{186}{310}=\frac{31\times 6}{31\times 10}=\frac{6}{10}=\frac{60}{100}$$

D'où le classement par ordre décroissant suivant : $P_2\rangle P_1\rangle P_3\rangle P_4$.

PARTIE GEOMETRIQUE

Exercice 1 :



1. L'équation de la droite (AB) est de la forme y = a x + b, où a et b sont deux nombres à déterminer.
Les points A et B appartiennent à cette droite donc :

$$\begin{cases} -4 = 2a + b & (1) \\ 8 = -2a + b & (2) \end{cases}$$

En additionnant les deux égalités (1) et (2) membre à membre, on obtient : 4 = 2b. D'où b = 2.
En remplaçant b par 2 dans l'égalité (1), on a :

$$-4 = 2a + 2$$
$$2a = -4 - 2$$
$$2a = -6$$
$$a = \frac{-6}{2}$$
$$a = -3$$

Finalement, la droite (AB) a pour équation $y = -3x + 2$.

2. Pour construire la droite (D), il suffit de connaître les coordonnées de deux de ses points, que nous appellerons E et F. Pour $x = 3$, $y = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1 + 2 = 3$. D'où : E(3 ;3).

Pour $x = -6$, $y = \frac{1}{3} \times (-6) + 2 = -2 + 2 = 0$. D'où : F(-6 ;0).
Reste à placer les points E et F dans le repère précédent et tracer la droite qui passe par E et F.

3. Soit (x_R ; y_R) les coordonnées du point R. Comme R se trouve à la fois sur la droite (D) et sur (AB), on a :

$$\begin{cases} y_R = -3x_R + 2 & (3) \\ y_R = \dfrac{1}{3}x_R + 2 & (4) \end{cases}$$

On soustraie membre à membre l'égalité (3) à la (4) pour obtenir : $0 = \frac{1}{3}x_R - (-3x_R)$.

Autrement dit, $\frac{1}{3}x_R + 3x_R = 0$

$$\left(\frac{1}{3}+3\right)x_R = 0$$

$$x_R = 0$$

Et donc, en remplaçant x_R par 0 dans l'égalité (3), $y_R = -3\times 0 + 2 = 2$.

D'où : R (0 ; 2).

Le milieu du segment [AB] a pour abscisse : $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$ et a pour ordonnée :

$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Donc R est bien le milieu du segment [AB].

4. On sait que les droites (D) et (AB) sont perpendiculaires et que (D) coupe (AB) en R qui est le milieu du segment [AB].
Or, si une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu, alors c'est sa médiatrice.
Donc la droite (D) est la médiatrice du segment [AB].

Exercice 2 :

1. L'image du point D par la rotation de centre O qui transforme B en C est le point A.

2.

$$\mathrm{OA} = \mathrm{CE}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

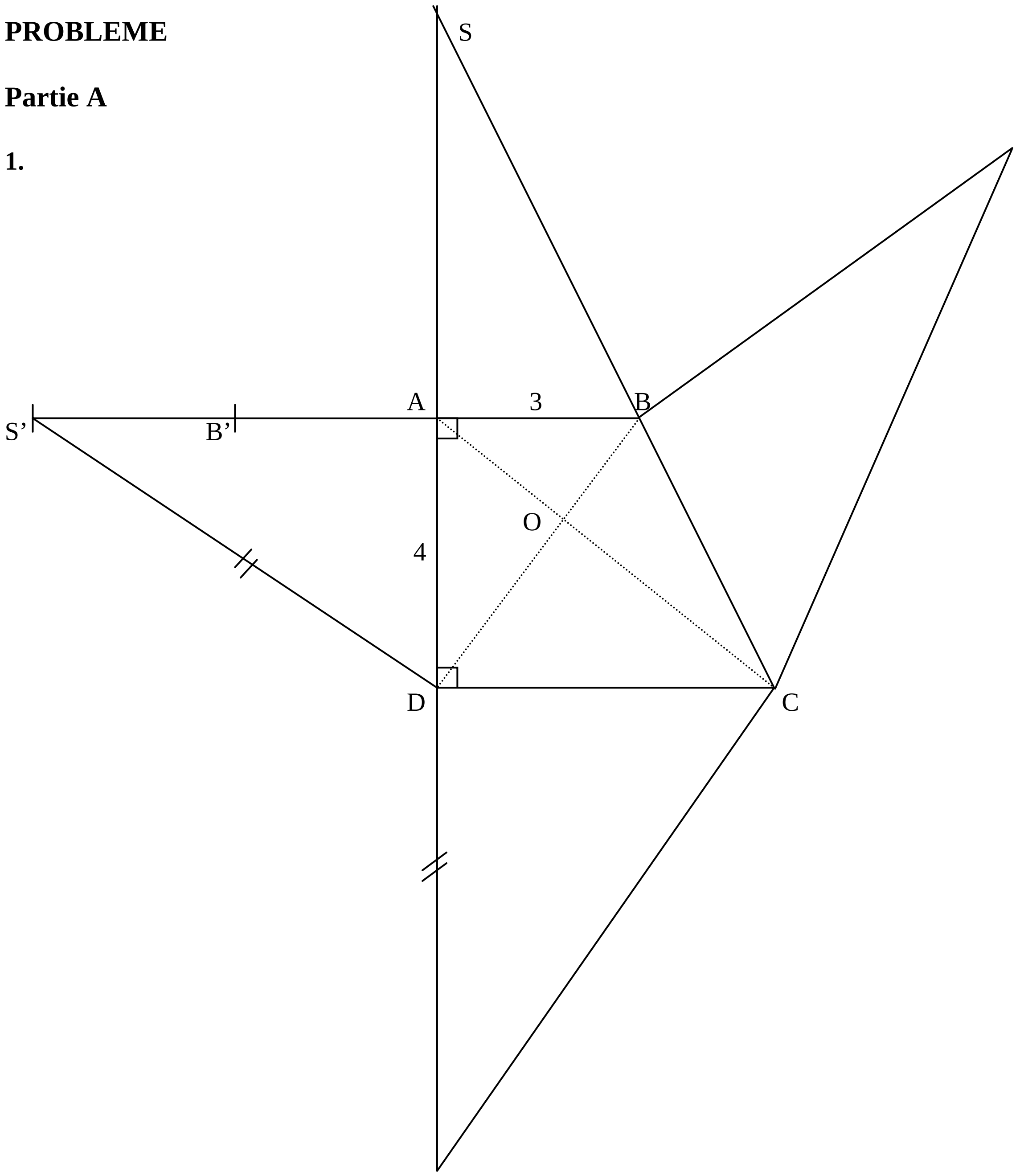
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

3. On sait que $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ donc le quadrilatère OBEF est un parallélogramme;
et que le point E est le symétrique de O par rapport à C donc C est le milieu de la diagonale [OE] .
Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
Donc les diagonales de OBEF, [OE] et [BF], se coupent en leur milieu, C.
Finalement, C est le milieu du segment [BF].

PROBLEME

Partie A

1.



2. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD rectangle en A, on a :

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{AD}^2$$

$$\mathrm{BD}^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\mathrm{BD}^2 = 9 + 16$$

$$\mathrm{BD}^2 = 25$$

$$\text{D'où :}\quad \mathrm{BD} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm.}$$

Donc BD = DC ; le triangle BCD est donc isocèle en D.

3. Soit A l'aire du trapèze ABCD.

$$A = \frac{1}{2}(B+b)\times h = \frac{1}{2}(DC + AB)\times AD = \frac{1}{2}(3+5)\times 4 = \frac{1}{2}\times 8\times 4 = 16$$

L'aire du trapèze ABCD vaut 16 cm².

4. On sait que :
- les points A, O et C sont alignés ; de même que les points B, O et D ;
- les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles AOB et DOC : $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$.

5. On sait que les angles $\widehat{DCB}$ et $\widehat{ABS}$ sont des angles correspondants et que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.
Or, si deux angles correspondants sont formés par deux droites parallèles, alors ils ont même mesure.
Donc $\widehat{DCB}=\widehat{ABS}$.

De plus, d'après la question **2.**, le triangle BCD est isocèle en D donc $\widehat{DCB}=\widehat{DBC}$.

Finalement, $\widehat{DBC}=\widehat{ABS}$.

Partie B

1.a. On sait que :
- les points S, A et D sont alignés ; de même que les points S, B et C ;
- les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles ASB et DSC : $\frac{SA}{SD}=\frac{SB}{SC}=\frac{AB}{DC}$.

Ce qui aboutit à : $\frac{x}{x+4}\left(=\frac{SB}{SC}\right)=\frac{3}{5}$.

b. L'équation précédente permet d'écrire : $5x=3(x+4)$

$$5x=3x+12$$
$$5x-3x=12$$
$$2x=12$$
$$x=\frac{12}{2}$$
$$x=6$$

La distance SA vaut 6 cm.

2. Dans le triangle ASB rectangle en A, on a : $\tan\widehat{ASB}=\frac{AB}{SA}$.

Autrement dit, $\tan\widehat{ASB}=\frac{3}{6}$ ou encore : $\tan\widehat{ASB}=0{,}5$. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $\widehat{ASB}\approx 27^{\circ}$.

3. et **4.** Voir figure.

5. Soit *V* le volume de la pyramide SABCD.

$V=\frac{1}{3}A\times h$, où *A* est l'aire du trapèze de base et *h* la hauteur de la pyramide.

D'après la question **1.b.**, *h*= SA = 6 cm.
Et d'après la question **3.** de la **Partie A**, *A* vaut 16 cm².

D'où : $V=\frac{1}{3}\times 16\times 6=32$.

Le volume de la pyramide SABCD vaut 32 cm^3.